CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM NHANH ĐÁP ÁN
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM
MÔN TOÁN
KÌ THI THPT

T402

LÊ HỒNG ĐỨC (Chủ biên)
ĐỖ HOÀNG HÀ – LÊ HOÀNG NAM
ĐOÀN MINH CHÂU – ĐÀO THỊ NGỌC HÀ

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM NHANH ĐÁP ÁN
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM
MÔN TOÁN
KÌ THI THPT

- Lời giải tự luận
- Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS
- Lựa chọn đáp án bằng phép thử
- Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS
- Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Sự ưu việt của phương pháp thi trắc nghiệm đã và đang được chứng minh từ những nước có nền giáo dục tiên tiến trên thế giới, bởi những ưu điểm như tính khách quan, tính bao quát và tính kinh tế.

Theo chủ trương của Bộ Giáo dục và Đào tạo, các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp sẽ chuyển sang hình thức tuyển sinh bằng phương pháp trắc nghiệm. Và để có thời gian chuẩn bị tốt nhất, các bài kiểm tra kiến thức trong chương trình THPT cũng sẽ có phần trắc nghiệm để các em học sinh làm quen với hình thức thi này.

Tuy nhiên, việc biên soạn các câu hỏi trắc nghiệm cần tuân thủ một số yêu cầu cơ bản về mặt lí luận sư phạm và ý nghĩa đích thực của các số liệu thống kê.

Nhóm HỒNG ĐỨC xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc cuốn sách: Các phương pháp tìm nhanh đáp án - Bài tập trắc nghiệm môn Toán - Kì thi THPT. Cuốn sách là nguồn tài liệu hữu ích, cung cấp cho học sinh một ngân hàng bài tập trắc nghiệm bám sát theo chương trình Toán THPT cùng tất cả các phương pháp có thể để tìm ra đáp án một cách nhanh nhất.

Với phần câu hỏi trắc nghiệm, các em học sinh cần luôn nhớ rằng có 1 trong 5 cách để lựa chọn đáp án đúng, cụ thể dựa vào:

1. Lời giải tự luận

2. Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx-570MS

3. Lựa chọn đáp án bằng phép thử

4. Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx-570MS

5. Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá

Nhóm HỒNG ĐỨC luôn mong muốn bộ sách đáp ứng được nhu cầu thực sự hiện nay *"Đổi mới phương pháp dạy học theo hướng lấy học trò làm trung tâm"* và hy vọng bộ sách sẽ được các thầy, cô giáo, các em học sinh yêu thích.

Để bộ sách ngày càng hoàn thiện hơn, nhóm HỒNG ĐỨC chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Nhóm HỒNG ĐỨC

PHẦN I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§1 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM QUAN HỆ GIỮA TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số y = f(x) xác định trên khoảng I thì:

a. Hàm số f(x) là đồng biến trên khoảng I khi và chỉ khi với x tuỳ ý thuộc I, ta có:

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$, với mọi $\Delta x \neq 0$ và $x + \Delta x \in I$.

b. Hàm số f(x) là nghịch biến trên khoảng I khi và chỉ khi với x tuỳ ý thuộc I, ta có:

$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} < 0$, với mọi $\Delta x \neq 0$ và $x + \Delta x \in I$.

Từ đó, ta có kết quả:

Cho hàm số y = f(x) *có đạo hàm trên khoảng* I.

a. *Nếu hàm số* f(x) *đồng biến trên khoảng* I *thì* $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

b. *Nếu hàm số* f(x) *nghịch biến trên khoảng* I *thì* $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.

2. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

Định lí 1 (Định lí Lagrange): Nếu hàm số y = f(x) *liên tục trên* [a; b] *và có đạo hàm trên* (a; b) *thì tồn tại một điểm* $c \in (a; b)$ *sao cho:*

$f(b) - f(a) = f'(c).(b - a)$

hay $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ý nghĩa của định lí Lagrange: Xét cung AB của đồ thị hàm số y = f(x) với A(a; f(a)) và B(b; f(b)).

Hệ số góc của cát tuyến AB là: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Đẳng thức: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ có nghĩa là hệ số góc của tiếp tuyến của cung AB tại điểm C (c; f(c)) bằng hệ số góc của cát tuyến AB. Vậy, nếu các giả thiết của định lí

Lagrange được thoả mãn thì tồn tại một điểm C của cung AB sao cho tiếp tuyến tại đó song song với cát tuyến AB.

Định lí 2: Cho hàm số y = f(x) *có đạo hàm trên khoảng* I.

a. *Nếu* $f'(x) > 0, \forall x \in I$ *thì* f(x) *đồng biến trên khoảng* I.

b. *Nếu* $f'(x) < 0, \forall x \in I$ *thì* f(x) *nghịch biến trên khoảng* I.

c. *Nếu* $f'(x) = 0, \forall x \in I$ *thì* f(x) *không đổi trên khoảng* I.

Ta có mở rộng của định lí 2 như sau:

Định lí 3: Cho hàm số y = f(x) *có đạo hàm trên khoảng* I.

a. *Nếu* $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$, *và đẳng thức chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên khoảng* I, *thì* f(x) *đồng biến trên khoảng* I.

b. *Nếu* $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$, *và đẳng thức chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên khoảng* I, *thì* f(x) *nghịch biến trên khoảng* I.

Ta tóm tắt định lí 3 trong các bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
y'	//////		+		//////
y	//////		↗		//////

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
y'	//////		-		//////
y	//////		↘		//////



II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Hàm số nào sau đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = (x^2+1)^2 - 3x$. B. $y = x\sqrt{x^2+1}$. C. $y = x - \frac{1}{x}$. D. $y = -\cot x$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* (Thực hiện từ trái qua phải): Ta lần lượt:

▫ Với hàm số $y = (x^2+1)^2 - 3x$ xác định trên $\mathbb{R}$ thì:

$y' = 4x(x^2+1) - 3 = 4x^3 + 4x - 3$

Hàm số không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$ bởi $y'(0) = -3 < 0$, do đó đáp án A bị loại.

▪ Với hàm số $y = x\sqrt{x^2+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$ thì:

$$y' = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, đáp án B là đúng, tới đây chúng ta dừng lại.

➢ *Lời giải tự luận 2:* (Thực hiện từ phải qua trái): Ta lần lượt:

▪ Với hàm số y = -cotx xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ nên đáp án D bị loại.

▪ Với hàm số $y = x - \frac{1}{x}$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên đáp án C bị loại.

▪ Với hàm số $y = x\sqrt{x^2+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$ thì:

$$y' = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, đáp án B là đúng, tới đây chúng ta dừng lại.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Trước tiên, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì phải xác định trên $\mathbb{R}$. Do đó, các đáp án C và D bị loại. Tới đây ta chỉ còn phải lựa chọn A và B.

▪ Vì A là hàm số bậc bốn nên có đạo hàm là một đa thức bậc ba, và một đa thức bậc ba thì không thể luôn dương (do phương trình bậc ba luôn có ít nhất một nghiệm), suy ra đáp án A không thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận 1* chúng ta lần lượt thử từ trái qua phải cho các hàm số bằng việc thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số.

Bước 2: Đánh giá y' để xét tính đồng biến của nó trên $\mathbb{R}$.

Tới hàm số trong B chúng ta thấy thỏa mãn nên dừng lại ở đó. Trong trường hợp trái lại, chúng ta sẽ tiếp tục hàm số ở C, tại đây nếu C thỏa mãn thì chúng ta lựa chọn đáp án C còn không sẽ khẳng định D là đúng.

▪ *Trong cách giải tự luận 2* chúng ta lần lượt thử từ phải qua trái cho các hàm số.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* chúng ta loại trừ dần bằng việc thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Sử dụng điều kiện cần để hàm số đơn điệu trên D là phải xác định trên D, chúng ta loại bỏ được các đáp án C và D bởi các hàm số này đều không xác định trên $\mathbb{R}$.

Bước 2: Sử dụng tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, để loại bỏ được đáp án A.

Bài 2. Hàm số nào sau đây là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = -x^3 + 2x^2 - x + 3$. B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

C. $y = \cos 2x - 2x + 3$. D. $y = \sqrt{1-x^2}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* (Thực hiện từ trái qua phải): Ta lần lượt:

▪ Với hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - x + 3$ xác định trên $\mathbb{R}$ thì:

$y' = -3x^2 + 4x - 1$,

$y' \le 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 4x - 1 \le 0 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{3}$ hoặc $x \ge 1$.

Do đó, đáp án A bị loại.

▪ Với hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ xác định trên $\mathbb{R}$ thì:

$y' = -4x^3 + 4x$,

$y' \le 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x \le 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 - 1) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 0$ hoặc $x \ge 1$.

Do đó, đáp án B bị loại.

▪ Với hàm số $y = \cos 2x - 2x + 3$ xác định trên $\mathbb{R}$ thì:

$y' = -2\sin 2x - 2 = -2(\sin 2x + 1) \le 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó, đáp án C là đúng, tới đây chúng ta dừng lại.

➢ *Lời giải tự luận 2:* (Thực hiện từ phải qua trái): Ta lần lượt:

▪ Với hàm số $y = \sqrt{1-x^2}$ xác định trên $[-1; 1]$ nên đáp án D bị loại.

▪ Với hàm số $y = \cos 2x - 2x + 3$ xác định trên $\mathbb{R}$ thì:

$y' = -2\sin 2x - 2 = -2(\sin 2x + 1) \le 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó, đáp án C là đúng, tới đây chúng ta dừng lại.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Trước tiên, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì phải xác định trên $\mathbb{R}$. Do đó, đáp án D bị loại. Tới đây ta chỉ còn phải lựa chọn A, B và C.

▪ Vì B là hàm số bậc bốn nên có đạo hàm là một đa thức bậc ba, và một đa thức bậc ba thì không thể luôn âm (do phương trình bậc ba luôn có ít nhất một nghiệm), suy ra đáp án B không thỏa mãn.

▪ Với hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - x + 3$ xác định trên $\mathbb{R}$ thì:

$y' = -3x^2 + 4x - 1$,

$y' \leq 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 4x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$ hoặc $x \geq 1$.

Do đó, đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 3. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ đồng biến trên các khoảng:

A. $(-\infty; 1)$ và $[3; +\infty)$.
B. $(-\infty; 1]$ và $[3; +\infty)$.
C. $(-\infty; 1]$ và $(3; +\infty)$.
D. $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = x^2 - 4x + 3$.

▪ Hàm số đồng biến khi: $y' \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{array}\right.$,

Vậy, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Nhận xét rằng hàm đồng biến khi $y' \geq 0$ do đó sẽ có hai nửa đoạn (dấu ngoặc vuông "[,]") nên các đáp án A, C và D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận* chúng ta thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số.

Bước 2: Thiết lập điều kiện để hàm số đồng biến, từ đó rút ra được các khoảng cần tìm.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* chúng ta loại trừ ngay được các đáp án A, C và D thông qua việc đánh giá về sự tồn tại của các dấu ngoặc vuông. Trong trường hợp các đáp án được cho dưới dạng khác, chúng ta có thể đánh giá thông qua tính chất của hàm đa thức bậc ba - Bài toán sau minh họa cho nhận xét này.

Bài 4. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$ nghịch biến trên các khoảng:

A. $(-\infty; -1]$ và $[0; +\infty)$.
B. $(-\infty; 0]$ và $[1; +\infty)$.
C. $[-1; 0]$.
D. $(0; 1)$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = x^2 + x$.

▪ Hàm số nghịch biến khi: $y' \le 0 \Leftrightarrow x^2 + x \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 0$.

Vậy, hàm số nghịch biến trên $[-1; 0]$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Nhận xét rằng:

▪ Hàm số nghịch biến khi $y' \le 0$ do đó sẽ có hai nửa đoạn (dấu ngoặc vuông "[,]") nên đáp án D bị loại.

▪ Hàm đa thức bậc ba với $a > 0$ nghịch biến trên đoạn nằm giữa hai nghiệm của phương trình $y' = 0$ nên các đáp án A và B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Chú ý: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng bằng phép thử các em học sinh cần nắm vững kiến thức về tính chất của hàm đa thức bậc ba và dấu tam thức bậc hai.

Bài 5. Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1$ đồng biến trên các khoảng:

A. $(-\infty; -1]$ và $[1; +\infty)$.
B. $[-1; 0]$ và $[1; +\infty)$.
C. $(-\infty; -1]$ và $[0; 1]$.
D. $[-1; 1]$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = x^3 - x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

▪ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$ ↘		-6	↗	-5	↘	-6	↗	$+\infty$

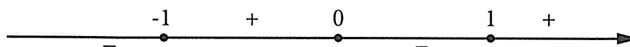
Từ đó, suy ra hàm số đồng biến trên $[-1; 0]$ và $[1; +\infty)$.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = x^3 - x$, $y' \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$

Dựa trên việc xét dấu bằng cách vẽ trục số như sau:



Từ đó, suy ra hàm số đồng biến trên $[-1; 0]$ và $[1; +\infty)$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Nhận xét rằng hàm đa thức bậc bốn dạng trùng phương với $a > 0$ thì:

▪ Có khoảng đồng biến chứa $+\infty$ nên các đáp án C và D bị loại.

▪ Có khoảng đồng biến không chứa $-\infty$ nên đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận 1* chúng ta thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số.

Bước 2: Thay vì thiết lập điều kiện $y' \geq 0$ chúng ta đi giải phương trình $y' = 0$ rồi lập bảng biến thiên cho trực quan (bởi việc giải bất phương trình bậc ba dễ gây nhầm dấu).

▪ *Trong cách giải tự luận 2* chúng ta thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số.

Bước 2: Thiết lập điều kiện $y' \geq 0$ chúng ta xác định được nghiệm của bất phương trình bằng việc xét dấu ngay trên trục số (miền ngoài cùng cùng dấu với hệ số a và sau đó đan dấu).

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* các em học sinh cần nắm vững kiến thức về tính chất của hàm đa thức bậc bốn dạng trùng phương.

Bài 6. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 5$ nghịch biến trên các khoảng:

A. $(-\infty; -1]$ và $[1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1]$ và $[0; 1]$.

C. $[-1; 0]$ và $[1; +\infty)$. D. $[-1; 1]$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-6	↗	-5	↘	-6	↗	$+\infty$

Từ đó, suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1]$ và $[0; 1]$.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm:

$y' = x^3 - x$, $y' \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 0] \cup [1; +\infty)$.

Dựa trên việc xét dấu bằng cách vẽ trục số như sau:



Từ đó, suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1]$ và $[0; 1]$.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Nhận xét rằng hàm đa thức bậc bốn dạng trùng phương với $a > 0$ thì:

- Có khoảng nghịch biến chứa $-\infty$ nên các đáp án C và D bị loại.
- Có khoảng nghịch biến không chứa $+\infty$ nên đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 7. Hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng:

A. $(-\infty; 1]$. **B.** $[1; +\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
- Đạo hàm: $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch trên D.

Vậy, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Nhận xét rằng hàm phân thức bậc nhất trên bậc

nhất luôn đơn điệu (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến) trên tập xác định của nó, do đó ta lựa chọn ngay đáp án C cho bài toán.

☞ Chú ý: *Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng bằng phép thử các em học sinh cần nắm vững kiến thức về tính chất của hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất.*

Bài 8. Hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ đồng biến trên khoảng:

A. $(-\infty; -1]$. B. $[-1; +\infty)$. C. $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. D. $\mathbb{R}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D.

Vậy, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Nhận xét rằng hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất luôn đơn điệu (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến) trên tập xác định của nó, do đó ta lựa chọn ngay đáp án C cho bài toán.

Bài 9. Hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ nghịch biến trên các khoảng:

A. $(-\infty; 1)$ và $(1; 2]$. B. $(-\infty; 1)$ và $[2; +\infty)$.

C. $[0; 1)$ và $(1; 2]$. D. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

▪ Hàm số nghịch biến khi $y' \le 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 2$.

Vậy, nghịch biến trên các khoảng $[0; 1) \cup (1; 2]$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ và với hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất thì $y' = 0$ hoặc vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt đối xứng qua điểm 1. Do đó, các đáp án A và B bị loại. Tới đây ta chỉ còn phải lựa chọn C và D.

▪ Lấy x = 2 và x = 3 suy ra y(2) = 4 và y(3) = $\frac{9}{2}$, tức là hàm số đồng biến trên [2; 3], suy ra đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Với hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất có ad < 0 thì điều kiện y' ≤ 0 tương đương với $Ax^2 + Bx + C \le 0$ (với A > 0). Suy ra, chúng ta chỉ có thể nhận được [a; b] (với a + b = 2).

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 10. Hàm số $y = x - \frac{2}{x}$ đồng biến trên các khoảng:

A. [-2; 3]. B. [-2; 3]\{0}. C. $\mathbb{R}$ \ (-2; 2). D. $\mathbb{R}$ \ {0}.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định D = $\mathbb{R}$ \{0}.

▪ Đạo hàm: $y' = 1 + \frac{2}{x^2} > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D.

Vậy, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ \{0}.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì D = $\mathbb{R}$ \{0} và với hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất thì y' = 0 hoặc vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt đối xứng qua điểm 0. Do đó, các đáp án A và B bị loại. Tới đây ta chỉ còn phải lựa chọn C và D.

▪ Lấy x = 1 và x = 2 suy ra y(1) = -1 và y(2) = 1, tức là hàm số đồng biến trên [1; 2], suy ra đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 11. Hàm số $y = \sqrt{2 + x - x^2}$ nghịch biến trên:

A. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. B. $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$. C. [2; +∞). D. [-1; 2].

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định D = [-1; 2].

▪ Đạo hàm: $y' = \frac{1-2x}{2\sqrt{2+x-x^2}}$, $y' \le 0 \Leftrightarrow 1 - 2x \le 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$.

Vậy, hàm số nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Tìm tập xác định của hàm số D = [-1; 2], suy ra các đáp án C và D là sai.

▪ Xuất phát từ tính chất của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (với a < 0) nghịch biến trên $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, suy ra đáp án B không thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Xuất phát từ tính chất của hàm số:

$y = -x^2 + x + 2$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Suy ra các đáp án B, C, D không thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 12. Hàm số $y = x - \sqrt{x}$ đồng biến trên:

A. $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$. B. $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. C. $\left[0; \frac{1}{4}\right]$. D. $(-\infty; 0]$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có điều kiện: $x \geq 0 \Rightarrow D = [0; +\infty)$.

▪ Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

▪ Bảng biến thiên:

x	-∞	0		1/4		+∞
y'	//////		-	0	+	
y	//////	0	↘	-1/4 CT	↗	+∞

Vậy, hàm số đồng biến trên $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì D = [0; +∞) nên các đáp án A và D bị loại. Tới đây ta chỉ còn phải lựa chọn B và C.

▪ Lấy $x = \frac{1}{4}$ và x = 1 suy ra $y\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ và y(1) = 0, tức là hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$, suy ra đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 13. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi:

A. $|a| \le 1$. B. $a \ge 1$. C. $a \le 2$. D. $|a| \le 2$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = x^2 + 2ax + 4$
- Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ điều kiện là:

$$y' \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 2ax + 4 \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D'_f \le 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4 \le 0 \Leftrightarrow |a| \le 2.$$

Vậy, với $|a| \le 2$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận*: Ta có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = x^2 + 2ax + 4$.

Khi đó:

- Với $a = -2$ thì $y' = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ do đó các đáp án A và B bị loại (vì chúng không chứa giá trị $a = -2$).
- Với $a = -3$ thì $y' = x^2 - 6x + 4$ không thể không âm với mọi $x \in \mathbb{R}$ do đó đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 14. Cho hàm số $y = ax - x^3$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi:

A. $a \le 0$. B. $a \ge 1$. C. $a \le 2$. D. $0 \le a \le 2$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = a - 3x^2$.
- Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ điều kiện là:

$$y' \le 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a - 3x^2 \le 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \le 3x^2\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \le 0.$$

Vậy, với $a \le 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta có với a = 1 thì y' = 1 - $3x^2$ không thể không dương với mọi $x \in \mathbb{R}$ do đó các đáp án B, C và D bị loại (vì chúng chứa giá trị a = 1).

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 15. Cho hàm số $y = \frac{mx-2}{x-1}$. Hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó khi:

A. $m \le 4$. B. $m > 2$. C. $m \ge 2$. D. $m < 4$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Đạo hàm: $y' = \frac{2-m}{(x-1)^2}$.
- Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ điều kiện là:

$y' \le 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm

$\Leftrightarrow 2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Vậy, với m > 2 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận*: Ta có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = \frac{2-m}{(x-1)^2}$.

Khi đó:

- Với m = 0 thì: $y' = \frac{2}{(x-1)^2} > 0 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên D

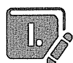
$\Rightarrow$ Các đáp án A và D bị loại (vì nó chứa giá trị m = 0).

- Với m = 2 thì: $y' = 0 \Rightarrow$ Hàm số là hàm hằng $\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Chú ý: *Rất nhiều học sinh khi thực hiện bài toán trên dưới dạng tự luận đã đưa ra kết luận $m \ge 2$.*

§2 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm cực trị của hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ *xác định trên tập hợp* D $(D \in R)$ và $x_0 \in D$.

a. x_0 *gọi là một điểm cực đại của hàm số* $y = f(x)$ *nếu tồn tại một khoảng* $(a; b)$ *chứa điểm* x_0 *sao cho* $(a; b) \in D$ *và:*

$f(x) < f(x_0)$, với mọi $x \in (a; b)\backslash\{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực đại* của hàm số f(x).

b. x_0 *gọi là một điểm cực tiểu của hàm số* $y = f(x)$ *nếu tồn tại một khoảng* $(a; b)$ *chứa điểm* x_0 *sao cho* $(a; b) \in D$ *và:*

$f(x) > f(x_0)$, với mọi $x \in (a; b)\backslash\{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là *giá trị cực tiểu* của hàm số f(x).

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là *cực trị*.

2. Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) và $x_0 \in (a, b)$.

Định lí 1: Giả sử hàm số $y = f(x)$ *đạt cực trị tại điểm* x_0. *Khi đó, nếu f(x) có đạo hàm tại điểm* x_0 *thì* $f'(x_0) = 0$.

3. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Định lí 2: Giả sử hàm số $y = f(x)$ *liên tục trên khoảng* (a ; b) *chứa điểm* x_0 *và có đạo hàm trên các khoảng* $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. *Khi đó:*

a. *Nếu* $f'(x) < 0$ *với mọi* $x \in (a; x_0)$ *và* $f'(x) > 0$ *với mọi* $x \in (x_0; b)$ *thì hàm số* f(x) *đạt cực tiểu tại điểm* x_0.

b. *Nếu* $f'(x) > 0$ *với mọi* $x \in (a; x_0)$ *và* $f'(x) < 0$ *với mọi* $x \in (x_0; b)$ *thì hàm số* f(x) *đạt cực đại tại điểm* x_0.

Nói một cách vắn tắt: *Nếu khi* x *qua* x_0, *đạo hàm đổi dấu thì điểm* x_0 *là một điểm cực trị.*

Ta tóm tắt *Định lí 2* trong các bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	a		x_0		b	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$		
y			$\searrow$	CT	$\nearrow$		

x	$-\infty$	a		x_0		b	$+\infty$
y'			$+$	0	$-$		
y			$\nearrow$	CĐ	$\searrow$		

Từ *Định lí 2* ta có quy tắc tìm cực trị sau đây:

Quy tắc 1: Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính $f'(x)$.

Bước 2: Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, ...$) tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 3: Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Định lí 3: *Giả sử hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm cấp một trên khoảng* $(a; b)$ *chứa điểm* x_0, $f'(x_0) = 0$ *và* $f(x)$ *có đạo hàm cấp hai khác* 0 *tại điểm* x_0.

a. *Nếu* $f''(x_0) < 0$ *thì hàm số đạt cực đại tại điểm* x_0.

b. *Nếu* $f''(x_0) > 0$ *thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm* x_0.

Từ định lí 3 ta có quy tắc tìm cực trị sau đây:

Quy tắc 2: Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính $f'(x)$.

Bước 2: Tìm các nghiệm x_i ($i = 1, 2, ...$) của phương trình $f'(x) = 0$.

Bước 3: Với mỗi i ta tính $f''(x_i)$, khi đó:

- Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.
- Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 3$. Hàm số có:

A. Một cực đại và một cực tiểu.

B. Hai cực đại.

C. Hai cực tiểu.

D. Không có cực trị.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định D = $\mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 12x + 9$,

  $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -3$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ -3	↘	CT -7	↗	$+\infty$

Vậy, hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta có đánh giá:

- Hàm đa thức bậc ba chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp:
  - Không có cực trị.
  - Một cực đại và một cực tiểu.

Suy ra, các đáp án B và C bị loại.

- Tính nhanh y' và nhận thấy phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận* chúng ta sử dụng quy tắc 1 để giải.
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* các em học sinh cần nắm vững kiến thức về tính chất cực trị của hàm đa thức bậc ba.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 2$. Hàm số có:

A. Một cực đại và hai cực tiểu. **B.** Một cực tiểu và hai cực đại.

C. Một cực đại và không có cực tiểu. **D.** Một cực đại và một cực tiểu.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định D = $\mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 16x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$

▪ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT -14	↗	CĐ 2	↘	CT -14	↗	$+\infty$

Vậy, hàm số có một cực đại và hai cực tiểu.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Nhận xét rằng hàm trùng phương với $a > 0$ chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp:

▪ Một cực tiểu.

▪ Một cực đại và hai cực tiểu.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận* chúng ta sử dụng quy tắc 1 để giải. Chú ý rằng, để nhanh chóng lựa chọn được đáp án đúng chúng ta thường thực hiện *trích lược tự luận*, tức là không cần thiết phải tính các giá trị cực trị mà chỉ cần dựa vào bảng xét dấu của y' để chỉ ra được đáp án đúng.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* các em học sinh cần nắm vững kiến thức về tính chất cực trị của hàm đa thức bậc bốn dạng trùng phương.

Bài 3. Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 3$. Hàm số có:

A. Một cực đại và hai cực tiểu.
B. Một cực tiểu và hai cực đại.
C. Một cực đại và không có cực tiểu.
D. Một cực tiểu và không có cực đại.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm:

$$y' = 4x^3 + 4x,\ y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT 3	↗	$+\infty$

Vậy, hàm số có một cực tiểu và không có cực đại.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Nhận xét rằng hàm trùng phương với $a > 0$ chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp:

- Một cực tiểu.
- Một cực đại và hai cực tiểu.

Suy ra, các đáp án B và C bị loại.

Ta có:

$$y' = 4x^3 + 4x,\ y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Tức là, hàm số chỉ có một cực trị nên đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 4. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Hàm số có:

A. Một cực đại. B. Một cực tiểu.

C. Một cực đại và một cực tiểu. D. Không có cực trị.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
- Đạo hàm: $y' = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$ với $\forall x \in D \Rightarrow$ Hàm số không có cực trị.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Nhận xét rằng hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất không có cực trị nên ta thấy ngay việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận* chúng ta sử dụng quy tắc 1 để giải.
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* các em học sinh cần nắm vững kiến thức về tính chất cực trị của hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất.

Bài 5. Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x}$. Hàm số có:

A. Một cực đại và hai cực tiểu.

B. Một cực tiểu và hai cực đại.

C. Một cực đại và một cực tiểu.

D. Không có cực trị.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y	$-\infty$ ↗		CĐ -2	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	CT 2	↗	$+\infty$

Vậy, hàm số có một cực đại và không có cực tiểu.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Nhận xét rằng hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp:

- Không có cực trị.
- Một cực tiểu và một cực đại (hai cực trị).

Suy ra, các đáp án A và B bị loại.

Ta có:

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2},\ y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Tức là, hàm số có hai cực trị nên đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận* chúng ta sử dụng quy tắc 1 để giải. Chú ý rằng, để nhanh chóng lựa chọn được đáp án đúng chúng ta thường thực hiện *trích lược tự luận kết hợp với tính chất của hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất*, tức là không cần thiết phải lập bảng biến thiên mà chỉ cần dựa vào số nghiệm của y' để chỉ ra được đáp án đúng.
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* các em học sinh cần nắm vững kiến thức về tính chất cực trị của hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất.

Bài 6. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$. Hàm số có:

A. Không có cực trị.

B. Hai cực đại.

C. Hai cực trị và hoành độ cực tiểu nhỏ hơn hoành độ cực đại.

D. Hai cực trị và hoành độ cực tiểu lớn hơn hoành độ cực đại.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

▪ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	||	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ -3	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	CT 1	↗	$+\infty$

Vậy, hàm số có hai cực trị và hoành độ cực tiểu lớn hơn hoành độ cực đại.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Ta có:

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2 \Rightarrow$ Hàm số có hai cực trị.

Mặt khác: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ (đạt cực đại tại $x = 0$).

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận* chúng ta sử dụng quy tắc 1 để giải.

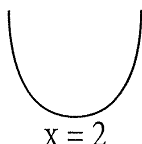
▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá* một vài em học sinh nếu cảm thấy khó hiểu thì hãy xem cách giải thích như sau:

Chúng ta đã thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Tính đạo hàm để khẳng định hs có hai cực trị.

Bước 2: Nhận xét rằng: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

Suy ra, qua $x = 2$ hàm số có hướng đi lên, tức là ta có dáng:



Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ (đạt cực đại tại $x = 0$).

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 7. Cho hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$. Hàm số có:

A. Một cực đại và một cực tiểu.

B. Một cực tiểu và hai cực đại.

C. Một cực đại và không có cực tiểu.

D. Một cực tiểu và không có cực đại.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta lần lượt có:

- Ta có điều kiện: $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow D = [-2; 2]$.
- Đạo hàm: $y' = \dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \in D$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2	$+\infty$
y'			-	0	+		-		
y		0	↘	-2 (CT)	↗	2 (CĐ)	↘	0	

Từ đó, suy ra hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

➢ ***Lời giải tự luận nhanh***: Ta lần lượt có:

- Điều kiện: $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow D = [-2; 2]$.
- Đạo hàm:

$$y' = \sqrt{4-x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Từ đó, suy ra phương trình $y' = 0$ (có dạng $4 - 2x^2 = 0$) luôn có hai nghiệm phân biệt thuộc tập D và đổi dấu qua chúng. Suy ra, hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 8. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5$. Tổng các hoành độ cực đại và cực tiểu của hàm số bằng:

A. -2. B. -1. C. 0. D. $\frac{1}{2}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = x^2 + x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 + x_2 = -1$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = x^2 + x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -1$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lời giải tự luận dựa trên tính chất:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = x^2 + x$, $y'' = 2x + 1$,

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_U = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2x_U = -1.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lời giải trích lược tự luận dựa trên tính chất:* Ta lần lượt có:

- Hàm đa thức bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hoành độ điểm uốn là:

$$x_U = -\frac{b}{3a} \Rightarrow x_U = -\frac{1}{2}$$

- Khi đó, tổng các hoành độ cực đại và cực tiểu của hàm số là: $x_1 + x_2 = 2x_U = -1$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận 1* chúng ta tìm hai nghiệm của phương trình $y' = 0$ rồi tính tổng hai nghiệm đó.
- *Trong cách giải tự luận 2* chúng ta tìm tổng hai nghiệm của phương trình $y' = 0$ bằng định lí Vi-ét và cách giải này tỏ ra hiệu quả hơn trong trường hợp hai nghiệm của phương trình $y' = 0$ lẻ.

▪ *Trong cách giải tự luận dựa trên tính chất,* các em học sinh cần biết được tính chất đối xứng của các điểm cực đại và cực tiểu (nếu có) của hàm đa thức bậc ba qua điểm uốn. Như vậy, nếu bài toán yêu cầu *"Tính tổng các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số"* thì ngoài cách giải tự luận thông thường chúng ta có thể thực hiện như sau:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = x^2 + x$, $y'' = 2x + 1$, $y'' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_U = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y_{CĐ} + y_{CT} = 2y_U = 2y(-\frac{1}{2}) = \frac{61}{12}$.

▪ *Trong cách giải trích lược tự luận dựa trên tính chất* các em học sinh cần biết được mọi hàm đa thức bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ luôn có hoành độ điểm uốn là $x_U = -\frac{b}{3a}$ và tính chất đối xứng của các điểm cực đại và cực tiểu (nếu có) của hàm số qua điểm uốn.

Bài 9. Cho hàm số $y = x - 1 + \frac{2}{x}$. Tổng các hoành độ cực đại và cực tiểu của hàm số bằng:

A. $-\frac{3}{2}$. B. -1. C. 0. D. $\frac{3}{2}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{2}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{2}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lời giải tự luận dựa trên tính chất:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

▪ Tiệm cận đứng $x = 0$, suy ra: $x_1 + x_2 = 2.0 = 0$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng trích lược tự luận dựa trên tính chất:* Ta có hoành độ tâm đối xứng:

$x_I = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2x_I = 0$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận 1* chúng ta tìm hai nghiệm của phương trình y' = 0 rồi tính tổng hai nghiệm đó.

▪ *Trong cách giải tự luận 2* chúng ta tìm tổng hai nghiệm của phương trình y' = 0 bằng định lí Vi-ét và cách giải này tỏ ra hiệu quả hơn trong trường hợp hai nghiệm của phương trình y' = 0 lẻ.

▪ *Trong cách giải tự luận dựa trên tính chất* các em học sinh cần biết được tính chất đối xứng của các điểm cực đại và cực tiểu (nếu có) của hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất qua tâm đối xứng (là giao điểm của hai đường tiệm cận). Như vậy, nếu bài toán yêu cầu *"Tính tổng các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số"* thì ngoài cách giải tự luận thông thường chúng ta có thể thực hiện như sau:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Tiệm cận đứng x = 0; tiệm cận xiên y = x + 1, suy ra tâm đối xứng I(0; 1), từ đó ta được $y_{CĐ} + y_{CT} = 2.1 = 2$.

Bài 10. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2, tích $x_1.x_2$ bằng:

A. -3. B. -2. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

▪ Đạo hàm:

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{array}\right. \Rightarrow x_1.x_2 = 1.3 = 3.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1.x_2 = \frac{c}{a} = 3$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Để tăng độ khó cho dạng toán này thông thường người ta đặt ra yêu cầu tính một biểu đối xứng phức tạp hơn giữa các nghiệm x_1 và x_2.

Bài 11. Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 3$. Hàm số có ba điểm cực trị x_1, x_2, x_3. Tích $x_1.x_2.x_3$ bằng:

A. -2. B. -1. C. 0. D. 1.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 16x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_{2,3} = \pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow x_1.x_2.x_3 = 0$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 16x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0$. (1)

Vì x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình (1) nên theo định lí Vi-ét ta có:

$$x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a} = 0.$$

Vậy, ta luôn có $x_1.x_2.x_3 = 0$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Nhận xét rằng hàm trùng phương (là hàm số chẵn) luôn có một hoành độ cực trị bằng 0, nên tích các hoành độ cực trị luôn bằng 0.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận 1* chúng ta tìm ba nghiệm của phương trình $y' = 0$ rồi tính tích các nghiệm đó.
- *Trong cách giải tự luận 2* chúng ta tìm tích ba nghiệm của phương trình $y' = 0$ bằng định lí Vi-ét.
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* các em học sinh cần nhớ rằng với hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ luôn có một điểm cực trị là $(0; c)$ do đó $x_1.x_2.x_3 = 0$. Ngoài ra, ta cũng luôn có: $x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + x_3 = 0$, $x_1.x_2 + x_2.x_3 + x_3.x_1 = x_3.x_1 = -\frac{3b}{4a}$.

Bài 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 1$. Tích các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số bằng:

A. -2921. B. -2291. C. -2912. D. -2192.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x - 24$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Khi đó, tích các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số bằng: $y_{CĐ}.y_{CT} = y(4).y(-2)$

$= (4^3 - 3.4^2 - 24.4 + 1)[(-2)^3 - 3.(-2)^2 - 24.(-2) + 1] = -2291$.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp với máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x - 24$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 24 = 0$.

▪ Giải nhanh phương trình $y' = 0$ bằng cách ấn:

MODE 1

MODE MODE MODE 1 ▶ 2

3 = (-) 6 = (-) 24 = → 4

▼ → –2

▪ Nhập hàm số ta ấn:

MODE 1

ALPHA X ^ 3 – 3 ALPHA X x² – 24 ALPHA X + 1

▪ Khi đó, ta lần lượt với các giá trị x = 4 và x = -2:

CALC 4 = → –79

CALC (-) 2 = → 29

× (-) 79 = → –2291

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên chúng ta chỉ có thể sử dụng cách giải tự luận. Việc tận dụng thêm các chức năng của máy tính CASIO fx-570MS trong trường hợp nghiệm của phương trình $y' = 0$ lẻ hoặc hàm số có hệ số lớn sẽ đảm bảo độ chính xác cho các kết quả.

Bài 13. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$. Tích các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số bằng:

A. $-\frac{1}{32}$.　　B. -1.　　C. 1.　　D. $\frac{1}{32}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = x^3 - x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

Khi đó, tích các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số bằng:

$$P = y(1).y(0).y(-1) = \frac{1}{32}.$$

➢ *Lời giải tự luận kết hợp với máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = x^3 - x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

Khi đó, tích các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số là $P = \frac{1}{32}$ được tính nhanh bằng cách ấn:

▪ Nhập hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ ta ấn:

(ALPHA X ^ 4) ÷ 4 − (ALPHA X x^2) ÷ 2 + 1 ÷ 2

▪ Khi đó, ta lần lượt với các giá trị x = 0, x = -1 và x = 1:

CALC 0 =	1⌟2
CALC (−) 1 =	1⌟4
CALC 1 =	1⌟4

Bài 14. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$. Tích các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số bằng:

A. -15. B. -10. C. -5. D. 0.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$.

Khi đó, tích các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số bằng:

$$P = y(-1).y(3) = \frac{(-1)^2 + 1 + 4}{-1 - 1}.\frac{3^2 - 3 + 4}{3 - 1} = -15.$$

➢ *Lời giải tự luận 1 kết hợp với máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$.

Khi đó, tích các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số là P = -15 được tính nhanh bằng cách ấn:

▪ Nhập hàm số $y = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$ ta ấn:

(ALPHA X x^2 − ALPHA X + 4) ÷ (ALPHA X − 1)

▪ Khi đó, ta lần lượt với các giá trị x = -1 và x = 3:

CALC (−) 1 = → −3

CALC 3 = → 5

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Khi đó:

$$\frac{u'}{v'} = 2x - 1 \Rightarrow P = y(0).y(2) = [2(-1) - 1](2.3 - 1) = -15.$$

➢ *Lời giải tự luận 2 kết hợp với máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Ta có: $\frac{u'}{v'} = 2x - 1$.

Khi đó, tích các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số là P = -15 được tính nhanh bằng cách ấn:

▪ Nhập hàm số y = 2x - 1 ta ấn:

2 ALPHA X − 1

▪ Khi đó, ta lần lượt với các giá trị x = -1 và x = 3:

CALC (−) 1 = → −3

CALC 3 = → 5

➢ *Lời giải tự luận 3:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -3 \end{cases}$

Khi đó: $\frac{u'}{v'} = 2x - 1 \Rightarrow P = y(x_1).y(x_2) = (2x_1 - 1)(2x_2 - 1)$

$$= 4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1 = 4.(-3) - 2.2 + 1 = -15$$

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận 1* chúng ta tìm hai nghiệm của phương trình y' = 0 rồi tính tích các giá trị của hàm số tại các nghiệm đó.

▪ *Cách giải tự luận 1 kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx-570MS chỉ có tính minh họa, bởi nó chỉ tỏ ra hiệu quả trong trường hợp nghiệm của phương trình y' = 0 lẻ hoặc hàm số có hệ số lớn.

▪ *Trong cách giải tự luận 2* chúng ta sử dụng kết quả:

"Với hàm phân thức $y = \frac{u}{v}$, giá trị cực đại cực tiểu được tính bằng cách thay hoành độ của chúng vào $\frac{u'}{v'}$".

▪ *Trong cách giải tự luận 3* chúng ta sử dụng kết quả được giới thiệu trong lời giải tự luận 2 và định lí Vi-ét.

Bài 15. Cho hàm số $y = |x|(x + 4)$. Tọa độ điểm cực đại của hàm số là:

A. (1; 3). B. (-2; 4). C. (0; 2). D. (0; 0).

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận sử dụng quy tắc I:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \begin{cases} -x(x+4) & \text{với } x \le 0 \\ x(x+4) & \text{với } x > 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} -2x-4 & \text{với } x \le 0 \\ 2x+4 & \text{với } x > 0 \end{cases}$$

▪ Bảng biến thiên:

x	-∞		-2		0		+∞
y'		+	0	-	0	+	
y	-∞	↗	CĐ 4	↘	CT 0	↗	+∞

Vậy, tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là (-2; 4).

➢ *Lời giải tự luận sử dụng quy tắc II:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \begin{cases} -x(x+4) & \text{với } x \le 0 \\ x(x+4) & \text{với } x > 0 \end{cases}, \quad y' = \begin{cases} -2x-4 & \text{với } x \le 0 \\ 2x+4 & \text{với } x > 0 \end{cases} \text{ và } y'' = \begin{cases} -4 & \text{với } x \le 0 \\ 4 & \text{với } x > 0 \end{cases}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y''(-2) = -4 < 0$

Vậy, tọa độ điểm cực đại của hàm số là (-2; y(-2)) = (-2; 4)

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên chúng ta chỉ có thể sử dụng cách giải tự luận. Tuy nhiên, người ta thường không lựa chọn quy tắc II cho các hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối, cụ thể quy tắc II không thể kiểm tra được đâu là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số, thêm vào đó với cách cho đáp án như vậy chúng ta chỉ có thể loại trừ được đáp án C bằng phép thử thông thường.

Bài 16. Cho hàm số y = sin2x - x - 2. Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm:

A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.
B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.
C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.
D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận sử dụng quy tắc II:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm:

$y' = 2\cos 2x - 1,\ y' = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$y'' = -4\sin 2x \Rightarrow y''\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -4\sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = 2\sqrt{3} > 0$

Do đó, hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Chọn k = 0, ta lần lượt tính các giá trị của hàm số tại $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$:

$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - 2$

$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} - 2$

$y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{6} - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} - 2$ (nhỏ nhất)

$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} - 2$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Cho dù hàm số đã cho không tuần hoàn nhưng chúng ta vẫn có thể sử dụng *phương pháp lựa chọn đáp án bằng phép thử* bởi với mọi k giá trị của hàm số chỉ hơn kém nhau kπ.

Bài 17. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành

B. Hàm số luôn có cực trị

C. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

D. Đồ thị hàm số luôn có tâm đối xứng

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \qquad (1)$

Khi phương trình (1) vô nghiệm thì hàm số không có cực trị.

Do đó, khẳng định B là sai.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên các em học sinh cần nắm vững tính chất của hàm đa thức bậc ba, cụ thể:

- Đồ thị của hàm đa thức bậc ba (các hàm đa thức bậc lẻ) luôn cắt trục hoành (do nó là hàm số liên tục và các giới hạn của hàm số ở hai đầu $-\infty$ và $+\infty$ trái dấu).
- Hàm số luôn có cực trị là khẳng định sai (đã được giải thích ở trên).
- Giới hạn tại vô cực bằng ∞ là đúng (tính chất này đúng với mọi hàm đa thức).
- Đồ thị hàm số luôn có tâm đối xứng bởi phương trình $y'' = 0$ có dạng $6ax + 2b = 0$ luôn có nghiệm $x = -\frac{b}{3a}$ với $a \neq 0$.

Bài 18. Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1$, $f(1) = 1$. Các hệ số a, b, c, d bằng:

A. $a = -2, b = 3, c = 0, d = 1$.

B. $a = -2, b = 3, c = 1, d = 0$.

C. $a = -1, b = 1, c = 1, d = 0$.

D. $a = -2, b = 3$ và $c = d = 0$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Đạo hàm: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $\quad f''(x) = 6ax + 2b$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$, $f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1$, $f(1) = 1$ điều kiện là:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \text{ và } f(1)=1 \\ f'(0) = 0 \text{ và } f'(1)=0 \\ f''(0) > 0 \text{ và } f''(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a+b+c+d = 1 \\ c = 0 \\ 3a+2b+c = 0 \\ 2b > 0 \text{ và } 6a+2b<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = d = 0 \end{cases}$$

Vậy, với $a = -2$, $b = 3$ và $c = d = 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt có đánh giá:

- Hàm số đi qua điểm O(0; 0) nên d = 0, suy ra đáp án A bị loại.
- Hàm số đi qua điểm A(1; 1) nên a + b + c + d = 1, suy ra đáp án B bị loại.
- Vì y'(0) = 0 nên c = 0, suy ra đáp án C bị loại.
- Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 19. Hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm x = -2 và đồ thị của hàm số đi qua điểm A(1; 0). Các hệ số a, b, c bằng:

A. a = 2, b = 0 và c = -4. B. a = 3, b = 0 và c = -4.

C. a = 1, b = 1 và c = -3. D. a = 5, b = 1 và c = -2.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Để hàm số đạt cực trị bằng 0 tại điểm x = -2 và đồ thị của hàm số đi qua điểm A(1; 0) điều kiện là:

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f'(-2) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 + 4a - 2b + c = 0 \\ 12 - 4a + b = 0 \\ 1 + a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$$

Vậy, với a = 3, b = 0 và c = -4 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt có đánh giá:

- Hàm số đi qua điểm A(1; 0) nên a + b + c + 1 = 0. Suy ra, các đáp án A và D bị loại.
- Hàm số đi qua điểm B(-2; 0) nên 4a - 2b + c - 8 = 0. Suy ra, đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 20. Hàm số $y = \dfrac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$ có cực đại và cực tiểu khi:

A. m = 1 B. m = 2 C. m = 4 D. Mọi m

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

▪ Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = x - m^2 + \frac{1}{x - m} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x - m)^2},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x - m)^2} = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = m \pm 1 \in D.$$

Tức là y' = 0 có hai nghiệm phân biệt thuộc D và đổi dấu qua hai nghiệm này, do đó hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Lấy m = 0, hàm số có dạng:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x^2}, y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1 \in D.$$

Tức là y' = 0 có hai nghiệm phân biệt thuộc D và đổi dấu qua hai nghiệm này, do đó hàm số có cực đại và cực tiểu tại m = 0 (chỉ có ở D).

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 21. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x$. Đường thẳng đi qua các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số có phương trình:

A. 8x - y + 3 = 0.

B. x - 8y + 3 = 0.

C. 8x + y + 3 = 0.

D. -x + 8y + 3 = 0.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x - 9, y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Vậy, đồ thị hàm số có các điểm cực trị A(-1; 5), B(3; -27) và phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(-1;5) \\ \text{qua } B(3;-27) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x+1}{3+1} = \frac{y-5}{-27-5} \Leftrightarrow (AB): 8x + y + 3 = 0.$$

➢ *Lời giải tự luận kết hợp phép thử:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

Vậy, đồ thị hàm số có các điểm cực trị A(-1; 5), B(3; -27) và tọa độ hai điểm A, B thỏa mãn phương trình trong C.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp tính chất:* Ta lần lượt có:

▫ Tập xác định D = $\mathbb{R}$.

▫ Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x - 9$

▫ Thực hiện phép chia y cho y', ta được: $y = (3x^2 - 6x - 9)(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}) - 8x - 3$.

Tức là, toạ độ các điểm cực đại và cực tiểu cùng thoả mãn $y = -8x - 3$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng trích lược tự luận:* Thực hiện phép chia y cho y', ta được:

$$y = (3x^2 - 6x - 9)(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}) - 8x - 3.$$

Tức là, toạ độ các điểm cực đại và cực tiểu cùng thoả mãn $y = -8x - 3$.

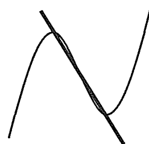
Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá 1 kết hợp tự luận*: Hàm số bậc ba khi có cực đại, cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm này phải đi qua điểm uốn của đồ thị. Ta có:

$$y' = 3x^2 - 6x - 9,\ y'' = 6x - 6,\ y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_U = 1 \Rightarrow U(1; -11).$$

Chỉ có đường thẳng trong C đi qua điểm U. Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá 2*: Hàm số bậc ba với a > 0 khi có cực đại, cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm này sẽ có hướng đi xuống (hình vẽ) nên hệ số của x và y trong phương trình đường thẳng phải cùng dấu.



Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▫ *Trong cách giải tự luận* chúng ta cần nhớ được phương pháp lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm.

▫ *Trong cách giải tự luận kết hợp phép thử* chúng ta tránh được việc phải nhớ được phương pháp lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm, nhưng cần thận trọng khi thử và tốt hơn là hãy kết hợp với máy tính CASIO fx-570MS để thực hiện tốt công đoạn này.

▫ *Cách giải tự luận kết hợp tính chất* luôn là sự lựa chọn tốt khi chúng ta không nhớ được phương pháp lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm hoặc tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số rất lẻ.

▪ Việc sử dụng cách *lựa chọn đáp án bằng trích lược tự luận* sẽ cho phép chúng ta lựa chọn được đáp án đúng một cách nhanh nhất.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá 1,* chúng ta sử dụng tính chất thẳng hàng của ba điểm cực đại, cực tiểu và điểm uốn đối với hàm đa thức bậc ba.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá 2* các em học sinh cần nhớ được các dạng đồ thị của hàm đa thức bậc ba, từ đó xác định được hướng của đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Bài 22. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + x - 1}{x - 1}$. Đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số có phương trình:

A. $2x + y - 1 = 0$. B. $2x + y + 1 = 0$.

C. $x - 2y - 3 = 0$. D. $x - 2y + 1 = 0$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy, đồ thị hàm số có các điểm cực trị A(0; 1), B(2; -3) và phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(0;1) \\ \text{qua } B(2;-3) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): 2x + y - 1 = 0$$

➢ *Lời giải tự luận kết hợp phép thử:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy, đồ thị hàm số có các điểm cực trị A(0; 1), B(2; -3) và tọa độ hai điểm A, B thỏa mãn phương trình trong A. Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp tính chất:* Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Tức là, hàm số có hai cực trị và toạ độ các điểm cực trị thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{(-x^2 + x - 1)'}{(x-1)'} \Leftrightarrow y = -2x + 1 \qquad (*)$$

Thấy ngay toạ độ các điểm cực đại và cực tiểu cùng thoả mãn (*).

Vậy phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị có dạng $y = -2x + 1$.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng trích lược tự luận:*** Phương trình đường thẳng đi qua hai cực trị của hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất luôn có dạng:

$$y = \frac{(-x^2 + x - 1)'}{(x-1)'} \Leftrightarrow y = -2x + 1.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá 1*: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Phương trình đường thẳng đi qua hai cực trị của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất phải đi qua tâm đối xứng của đồ thị, tức là đi qua điểm I(1; -1). Suy ra, các đáp án B và D bị loại.

▪ Hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất với $ad < 0$ khi có cực đại, cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm này sẽ có hướng đi xuống nên hệ số của x và y trong phương trình đường thẳng phải cùng dấu. Suy ra, đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá 2*: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất với $ad < 0$ khi có cực đại, cực tiểu thì phương trình đường thẳng đi qua hai điểm này sẽ có hướng đi xuống nên hệ số của x và y trong phương trình đường thẳng phải cùng dấu. Suy ra, các đáp án C và D bị loại.

▪ Phương trình đường thẳng đi qua hai cực trị của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất phải đi qua tâm đối xứng của đồ thị, tức là đi qua điểm I(1; -1). Suy ra, đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

§3 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ *xác định trên tập D.*

a. *Nếu tồn tại một điểm* $x_0 \in D$ *sao cho:* $f(x) \le f(x_0)$ *với mọi* $x \in D$ *thì số* $M = f(x_0)$ *được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số* $y = f(x)$ *trên tập* D *nếu, kí hiệu* $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$.

b. *Nếu tồn tại một điểm* $x_0 \in D$ *sao cho:* $f(x) \ge f(x_0)$ *với mọi* $x \in D$ *thì số* $m = f(x_0)$ *được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số* $y = f(x)$ *trên tập* D *nếu, kí hiệu* $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$.

Việc sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số được chia thành các dạng sau:

Dạng 1: Phương pháp khảo sát trực tiếp, được sử dụng để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng. Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tập xác định.

Bước 2: Đạo hàm y', rồi giải phương trình y' = 0.

Bước 3: Lập bảng biến thiên.

Bước 4: Kết luận về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số dựa trên bảng biến thiên.

Dạng 2: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn. Giả sử là đoạn [a; b], ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính đạo hàm y', rồi giải phương trình y' = 0 để tìm các nghiệm $x \in (a, b)$. Giả sử các nghiệm là $x_1, x_2, \ldots$

Bước 2: Tính các giá trị $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots$

Bước 3: Từ đó:

a. $\underset{x \in [a,b]}{\text{Min}}\, y = \text{Min}\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots\}$.

b. $\underset{x \in [a,b]}{\text{Max}}\, y = \text{Max}\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots\}$.

Dạng 3: Phương pháp khảo sát gián tiếp, được thực hiện thông qua việc sử dụng đối số mới t để đưa hàm số ban đầu về dạng $y = F(t)$ đơn giản hơn.

Vậy, để sử dụng phương pháp chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi hàm số ban đầu về dạng mới để xác định ẩn phụ

$y = F(\varphi(x))$.

Bước 2: Đặt $t = \varphi(x)$, ta có :

- Điều kiện của ẩn t là D_t.
- $y = F(t)$.

Bước 3: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = F(t)$ trên D_t.

 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Cho hàm số $y = -x + 2 - \frac{1}{x}$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng (0; 2) bằng:

A. -2. B. -1. C. 0. D. 1.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Ta lần lượt có:

- Tập xác định D = (0; 2).
- Đạo hàm:

$$y' = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2+1}{x^2}; \qquad y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
y'	(gạch chéo)		+	0	-		(gạch chéo)
y	(gạch chéo)		↗	CĐ 0	↘		(gạch chéo)

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\underset{x\in(0;2)}{\text{Max}}\, y = y(1) = 0$.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Với $x \in (0; 2)$, sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$x + \frac{1}{x} \ge 2 \Rightarrow y = 2 - (x + \frac{1}{x}) \le 2 - 2 = 0$$

Suy ra $\underset{x\in(0;2)}{\text{Max}}\, y = 0$ đạt được khi $x = \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

➢ ***Lời giải tự luận 3:*** Ta biến đổi:

$$y = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \le 0 \Rightarrow \underset{x\in(0;2)}{\text{Max}}\, y = 0 \text{ đạt được khi } \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ ***Lời giải tự luận kết hợp tính chất:*** Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

▪ Đạo hàm: $y' = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2+1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vì ad < 0 (và y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt) nên hàm đạt cực đại tại x = 1, từ đó suy ra:

$$\underset{x\in(0;2)}{\text{Max}}\, y = y(1) = 0.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt thử:

▪ Với y = 1, ta có phương trình:

$$-x + 2 - \frac{1}{x} = 1 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 - x + 1 = 0$$, vô nghiệm ⇒ Đáp án D bị loại.

▪ Với y = 0, ta có phương trình:

$$-x + 2 - \frac{1}{x} = 0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0; 2).$$

Tới đây, chúng ta dừng lại và khẳng định việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận 1* chúng ta sử dụng phương pháp đã được trình bày ở dạng 1.

▪ *Trong cách giải tự luận 2* chúng ta sử dụng kiến thức về bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất của hàm số (đây là dạng toán quen thuộc mà các em học sinh đã được làm quen ở các lớp 9, 10).

▪ *Trong cách giải tự luận 3* chúng ta sử dụng phép biến đổi đại số thông thường để đánh giá hàm số.

▪ *Trong cách giải tự luận kết hợp tính chất* các em học sinh cần nắm vững tính chất cực trị của hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất hoặc hình dung được bảng xét dấu của tam thức bậc hai.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* các em học sinh cần lưu ý hai điều:

- Bài toán hỏi giá trị lớn nhất thì chúng ta bắt đầu từ giá trị lớn nhất trong các đáp án để thử và ngược lại nếu bài toán hỏi giá trị nhỏ nhất thì chúng ta bắt đầu từ giá trị nhỏ nhất trong các đáp án để thử.
- Hàm số có giá trị lớn nhất bằng M thì sẽ phải tồn tại x_0 để $y(x_0) = M$.

Bài tiếp theo các em học sinh sẽ thấy sự thay đổi ở câu hỏi.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng (0; 3) đạt tại x bằng:

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định D = (0; 3).

▪ Đạo hàm: $y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3-1)}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

▪ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		1		3	$+\infty$
y'	//////		-	0	+		//////
y	//////		↘	CT 3	↗		//////

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{x\in(0;3)} y = y(1) = 3$ đạt được tại x = 1.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Với $x \in (0; 2)$, sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$x^2 + \frac{2}{x} = x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}} = 3$$

Suy ra $\min\limits_{x\in(0;3)} y = 3$ đạt được khi: $x^2 = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ - ứng với đáp án B.

➢ ***Lời giải tự luận 3:*** Ta biến đổi:

$$y = (x^2 - 2x + 1) + 2\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) + 3 = (x-1)^2 + 2\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 3 \geq 3$$

Suy ra $\min\limits_{x\in(0;3)} y = 3$ đạt được khi:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ - ứng với đáp án B.}$$

➢ ***Lời giải tự luận kết hợp tính chất:*** Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định D = (0; 2).

▪ Đạo hàm: $y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3-1)}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vì qua x = 1 thì y' đổi dấu từ âm sang dương nên hàm đạt cực tiểu tại x = 1 (và đó cũng chính là giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng (0; 3)).

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta có các đáp án A và D bị loại vì $x \in (0; 3)$. Khi đó, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} y(1) = 3 \\ y(2) = 5 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{x\in(0;3)} y = 3 \text{ đạt được tại } x = 1.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 3. Cho hàm số $y = 2x + \frac{1}{x^2}$ với x > 0. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng:

A. -1. B. 2. C. 3. D. 4.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta lần lượt có:

- Xét hàm số trên tập $D = (0; +\infty)$.
- Đạo hàm: $y' = 2 - \frac{2}{x^3}$ $y' = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$ 0		1		$+\infty$
y'	//////	-	0	+	
y	//////	$+\infty$ ↘	3 (CT)	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\min_{x \in D} y = 3$, đạt được khi x = 1.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Với x > 0, sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$y = 2x + \frac{1}{x^2} = x + x + \frac{1}{x^2} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 3\sqrt[3]{x.x.\frac{1}{x^2}} = 3$$

Suy ra $\min_{x \in D} y = 3$ đạt được khi $x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp* sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS: Ta lần lượt thử:

- Với y = -1 bị loại bởi với x > 0 ta luôn có y > 0. Suy ra, đáp án A bị loại.
- Với y = 2, ta có phương trình:

$2x + \frac{1}{x^2} = 2 \Leftrightarrow 2x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x \approx -0.5651$ (loại do x > 0) bằng cách ấn:

MODE 1

MODE MODE MODE 1 ▶ 3

2 = (–) 2 = 0 = 1 = → −0.5651

▼ → R↔I

Suy ra, đáp án B bị loại.

- Với y = 3, ta có phương trình:

$2x + \frac{1}{x^2} = 3 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$ (loại do $x > 0$) bằng cách ấn:

AC 2 = (−) 3 = 0 = 1 = ▼

−0.5
1

Tới đây, chúng ta dừng lại và khẳng định việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 4. Cho hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - x^3$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng:

A. -1. B. $-\frac{3}{4}$. C. $-\frac{1}{4}$. D. 0.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3x^3 - 3x^2$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 0$.
- Bảng biến thiên: Với lưu ý rằng dấu của y' chỉ phụ thuộc vào dấu của x - 1:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘		↘	CT -1/4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có Min $y = y(1) = -\frac{1}{4}$.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Ta biến đổi:

$y = \frac{3}{4}x^4 - x^3 \Leftrightarrow 4y = 3x^4 - 4x^3 = [2(x^4 - 2x^3 + x^2) + (x^4 - 2x^2 + 1) - 1]$

$= 2(x^2 - x)^2 + (x^2 - 1)^2 - 1 \geq -1.$

$\Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{4}$.

Suy ra Min $y = y(1) = -\frac{1}{4}$ đạt được khi:

$$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

➢ ***Lời giải tự luận kết hợp tính chất:*** Ta lần lượt có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3x^3 - 3x^2$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 0.$$

Vì dấu của y' chỉ phụ thuộc vào dấu của x - 1 nên hàm đạt cực tiểu tại x = 1, từ đó suy ra Min $y = y(1) = -\frac{1}{4}$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt thử:

▪ Với y = -1, ta có phương trình:

$\frac{3}{4}x^4 - x^3 = -1 \Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x^4 - 2x^3 + x^2) + (x^4 - 2x^2 + 1) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2 - x)^2 + (x^2 - 1)^2 + 3 = 0$, vô nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

▪ Với $y = -\frac{3}{4}$, ta có phương trình:

$\frac{3}{4}x^4 - x^3 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x^4 - 2x^3 + x^2) + (x^4 - 2x^2 + 1) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x^2 - x)^2 + (x^2 - 1)^2 + 2 = 0$, vô nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

▪ Với $y = -\frac{1}{4}$, ta có phương trình:

$\frac{3}{4}x^4 - x^3 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x^3 - x^2 - x - 1) = 0$

$\Rightarrow$ có nghiệm x = 1.

Tới đây, chúng ta dừng lại và khẳng định việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 5. Cho hàm số $y = \sin^4x + \cos^4x$. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta lần lượt có:

▪ Vì hàm số tuần hoàn với chu kì π và là hàm số chẵn nên ta xét trên $D = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

▪ Đạo hàm: $y' = 4\cos x.\sin^3x - 4\sin x.\cos^3x = 2(\sin^2x - \cos^2x)\sin 2x = -\sin 4x$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} \Rightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{4} \text{ và } x = \frac{\pi}{2}.$$

- Bảng biến thiên:

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
y'		-	0	+	
y	1	↘	1/2 CT	↗	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y_{Max} = 1$, đạt được khi $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Ta biến đổi:

$$y = \sin^4x + \cos^4x = (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x = 1 - \frac{1}{2}\sin^22x \le 1$$

Từ đó, suy ra $y_{Max} = 1$, đạt được khi:

$$\sin^22x = 0 \Leftrightarrow \sin2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

➢ ***Lời giải tự luận 3:*** Ta có đánh giá:

$$\begin{cases} \sin^4 x \le \sin^2 x \\ \cos^4 x \le \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow y = \sin^4x + \cos^4x \le \sin^2x + \cos^2x = 1.$$

Từ đó, suy ra $y_{Max} = 1$, đạt được khi:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 x \\ \cos^4 x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\sin^2 x)\sin^2 x = 0 \\ (1-\cos^2 x)\cos^2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin^2x.\cos^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\sin^22x = 0 \Leftrightarrow \sin2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt thử:

- Với y = 3, ta có phương trình:

$\sin^4x + \cos^4x = 3$, vô nghiệm bởi $|\sin x| \le 1$ và $|\cos x| \le 1$

$\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

- Với y = 2, ta có phương trình:

$\sin^4x + \cos^4x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^4 x = 1 \\ \cos^4 x = 1 \end{cases}$, vô nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

- Với y = 1, ta có phương trình:

$$\sin^4x + \cos^4x = 1 \Leftrightarrow (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 2\sin^2x.\cos^2x = 1$$

$$-\frac{1}{2}\sin^22x = 0 \Leftrightarrow \sin2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Tới đây, chúng ta dừng lại và khẳng định việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 + 2x - 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ là:

A. -5. B. 3. C. 10. D. 19.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta lần lượt có:

▪ Xét hàm số trên tập $D = [-2; 3]$.

▪ Đạo hàm: $y' = 2x + 2$, $y' = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Ta có $y(-2) = -5$, $y(-1) = -6$ và $y(3) = 10$. Khi đó:

$$\underset{x\in[-2;3]}{\text{Max}}\, y = \text{Max}\{-5, -6, 10\} = 10 \text{ đạt được khi } x = 3.$$

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta biến đổi:

$$y = x^2 + 2x - 5 = (x + 1)^2 - 6 \overset{x\in[-2;\,3]}{\leq} (3 + 1)^2 - 6 = 10.$$

Từ đó, suy ra $\underset{x\in[-2;3]}{\text{Max}}\, y = 10$, đạt được khi $x = 3$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt thử:

▪ Với $y = 19$, ta có phương trình: $x^2 + 2x - 5 = 19 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \notin [-2;\ 3] \\ x = 4 \notin [-2;\ 3] \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

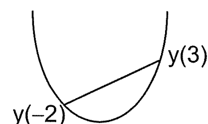
▪ Với $y = 10$, ta có phương trình:

$$x^2 + 2x - 5 = 10 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \notin [-2;\ 3] \\ x = 3 \in [-2;\ 3] \end{array}\right.$$

Tới đây, chúng ta dừng lại và khẳng định việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Parabol $y = x^2 + 2x - 5$ có $a = 1 > 0$ nên quay bề lõm lên trên.



▪ Parabol $y = x^2 + 2x - 5$ có hoành độ đỉnh $x_0 = -1 \in [-2; 3]$ với lưu ý khoảng cách từ 3 đến -1 xa hơn so với khoảng cách từ -2 đến -1.

Từ đó, suy ra $\underset{x\in[-2;3]}{\text{Max}}\, y = y(3) = 10$, ứng với đáp án C.

☞ Chú ý:

1. *Các em học sinh cần rất thận trọng ở phép đánh giá ở lời giải tự luận 2. Để có được lí giải thấu đáo các em học sinh hãy xem phép biến đổi sau:*

$$-2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x + 1 \leq 4$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x + 1 \leq 4 \\ -1 \leq x + 1 \leq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x+1)^2 \leq 16 \\ (x+1)^2 \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x + 1)^2 \leq 16.$$

2. *Ở bài tiếp theo các em học sinh sẽ thấy một cách đánh giá khác.*

Bài 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x - 5$ trên đoạn [0; 1] là:

A. -10. B. -8. C. 8. D. 10.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta lần lượt có:

▪ Xét hàm số trên tập D = [0; 1].

▪ Đạo hàm: $y' = 2x - 4$, $y' = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \notin D$.

Ta có y(0) = -5, y(1) = -8. Khi đó: $\underset{x\in[0;1]}{\text{Min}}\, y = \text{Min}\{-5, -8\} = -8$ đạt được khi x = 1.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta lần lượt có:

▪ Xét hàm số trên tập D = [0; 1].

▪ Đạo hàm:

$y' = 2x - 4 < 0\ \forall x \in D \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên D.

Từ đó, suy ra $\underset{x\in[0;1]}{\text{Min}}\, y = y(1) = -8$, ứng với đáp án B.

➢ *Lời giải tự luận 3:* Ta biến đổi:

$$y = x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 9 \overset{x\in[0;1]}{\geq} (1-2)^2 - 9 = -8.$$

Từ đó, suy ra $\underset{x\in[0;1]}{\text{Min}}\, y = -8$, đạt được khi x = 1.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt thử:

▪ Với y = -10, ta có phương trình:

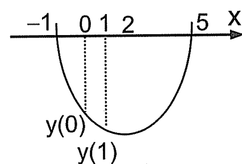
$x^2 - 4x - 5 = -10 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$, vô nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

▪ Với y = -8, ta có phương trình:

$$x^2 - 4x - 5 = -8 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \notin [0;1] \\ x = 1 \in [0;1] \end{array}\right.$$

Tới đây, chúng ta dừng lại và khẳng định việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Ta đi phác thảo Parabol $y = x^2 - 4x - 5$ và định vị các điểm x = 0, x = 1 cùng giá trị tương ứng của chúng trên đồ thị.



Từ đó, suy ra $\underset{x\in[0;1]}{\text{Min}}\, y = y(1) = -8$, ứng với đáp án B.

☞ Nhận xét: Như vậy, nội dung cách lựa chọn đáp án đúng bằng phép đánh giá trong bài 7 có khác so với bài 6, các em học sinh hãy lựa chọn cho mình một cách thích hợp với bản thân.

Bài 8. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 12$ trên đoạn [-4; 0] là:

A. -11. B. -15. C. -16. D. -18.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

▪ Xét hàm số trên tập D = [-4; 0].

▪ Đạo hàm:

$y' = 3x^2 + 12x + 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -3$.

Ta có y(-4) = -16, y(-3) = -12, y(-1) = -16 và y(0) = -12.

Khi đó, ta có:

$\underset{x\in D}{\text{Min}}\, y = \text{Min}\{-16, -12\} = -16$ đạt được khi x = -4 hoặc x = -1.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta lần lượt có:

▪ Xét hàm số trên tập D = [-4; 0].

▪ Đạo hàm:

$y' = 3x^2 + 12x + 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = -3$ bằng cách ấn:

MODE 1	
MODE MODE MODE 1 ▶ 2	
1 = 4 = 3 =	−1
▼	−3

Ta có:

f(-4) = -16, f(-3) = -12, f(-1) = -16 và f(0) = -12 bằng cách ấn:

MODE 1	
ALPHA X ^ 3 + 6 ALPHA X x^2 + 9 ALPHA X − 12	
CALC (−) 4 =	−16
CALC (−) 3 =	−12
CALC (−) 1 =	−16
CALC 0 =	−12

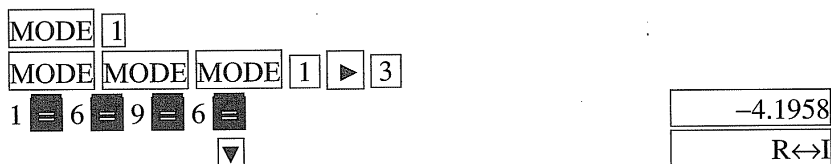
Khi đó, ta có: $\underset{x\in D}{\text{Min}}\, y = \text{Min}\{-16, -12\} = -16$ đạt được khi x = -4 hoặc x = -1.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp* sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS: Ta lần lượt thử:

▪ Với y = -18, ta có phương trình:

$x^3 + 6x^2 + 9x - 12 = -18 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 9x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x \approx -4.1958$ (loại do $x \in [-4; 0]$) bằng cách ấn:



- Với y = -16, ta có phương trình:

$x^3 + 6x^2 + 9x - 12 = -16 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -4$ và $x = -1$ đều thuộc đoạn $[-4; 0]$ bằng cách ấn:



Tới đây, chúng ta dừng lại và khẳng định việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2 - x^2}$ bằng:

A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. 0.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Điều kiện:

$2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Rightarrow$ Tập xác định $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

- Đạo hàm:

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{\sqrt{2-x^2} - x}{\sqrt{2-x^2}},$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ta có: $y(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $y(1) = 2$ và $y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Khi đó, ta có $\underset{x \in D}{\text{Max}}\, y = \text{Max}\{-\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}\} = 2$ đạt được khi $x = 1$.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Ta có:

$$y = x + \sqrt{2-x^2} \overset{\text{Bunhiacôpxki}}{\leq} \sqrt{(1+1)(x^2 + 2 - x^2)} = 2.$$

Suy ra Max y = 2 đạt được khi:

$$x = \sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lời giải tự luận 3:* Ta có điều kiện:

$2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Rightarrow$ Đặt $x = \sqrt{2}$ sint với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Khi đó, hàm số được chuyển về dạng:

$$y = \sqrt{2}\sin t + \sqrt{2 - 2\sin^2 t} = \sqrt{2}\,\text{sint} + \sqrt{2}\,|\text{cost}| \overset{t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}{=} \sqrt{2}\,(\text{sint} + \text{cost})$$

$$= 2\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2.$$

Suy ra Max y = 2 đạt được khi:

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \overset{t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1$$

➢ *Lời giải tự luận 4:* Ta có điều kiện:

$2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Rightarrow$ Đặt $x = \sqrt{2}$ cost với $t \in [0; p]$.

Khi đó, hàm số được chuyển về dạng:

$$y = \sqrt{2}\cos t + \sqrt{2 - 2\cos^2 t} = \sqrt{2}\,\text{cost} + \sqrt{2}\,|\text{sint}| \overset{t\in[0;\pi]}{=} \sqrt{2}\,(\text{cost} + \text{sint})$$

$$= 2\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \leq 2.$$

Suy ra Max y = 2 đạt được khi:

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \overset{t\in[0;\pi]}{\Leftrightarrow} t - \frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt thử:

▪ Với y = 2, ta có phương trình:

$$x + \sqrt{2 - x^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2 - x^2} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2 - x^2 = (2 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Tới đây, chúng ta dừng lại và khẳng định việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phương pháp đánh giá:* Lựa chọn $x = \frac{4}{3}$ chúng ta nhận thấy:

$$y\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} + \sqrt{2 - \frac{16}{9}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{3} \approx 1.8047$$

Từ đó, chúng ta nhận thấy rằng:

$\sqrt{2} < y\left(\frac{4}{3}\right) < 2 \Rightarrow$ các đáp án B, C và D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phương pháp đánh giá kết hợp* sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS: Trước tiên, ta nhập hàm số $y = x + \sqrt{2 - x^2}$ vào máy tính bằng cách ấn:

[ALPHA] [X] [+] [√] [(] 2 [–] [ALPHA] [X] [x²] [)]

Để thử với giá trị $x = \frac{4}{3}$ ta ấn:

CALC 4 $a^{b/c}$ 2 = 1.8047

Từ đó, chúng ta nhận thấy rằng:

$$\sqrt{2} < y\left(\frac{4}{3}\right) < 2 \Rightarrow$$ các đáp án B, C và D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ bằng:

A. $\frac{5}{2}$. B. 2. C. $\frac{3}{2}$. D. 1.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Điều kiện:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \text{Tập xác định } D = [0; 1].$$

▪ Đạo hàm:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Khi đó, ta có:

$$\underset{x\in D}{\text{Min}}\, y = \text{Min}\{y(0), y(\tfrac{1}{2}), y(1)\} = 1, \text{ đạt được khi } x = 0 \text{ hoặc } x = 1$$

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta lần lượt có:

$$y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \Leftrightarrow y^2 = x + 1 - x + 2\sqrt{x(1-x)} \geq 1 \Leftrightarrow y \geq 1$$

$$\Rightarrow \underset{x\in D}{\text{Min}}\, y = 1, \text{ đạt được khi } \sqrt{x(1-x)} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1$$

➢ *Lời giải tự luận 3:* Ta có điều kiện:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \text{Đặt } x = \cos^2 t \text{ với } t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Khi đó, hàm số được chuyển về dạng:

$$y = \sqrt{\cos^2 t} + \sqrt{1-\cos^2 t} = |\cos t| + |\sin t| \overset{t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}{=} \cos t + \sin t$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \overset{t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}{\geq} 1, \text{ do nhận thấy } \frac{\pi}{4} \leq t + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$$

Suy ra Min y = 1 đạt được khi:

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \overset{t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \\ t + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

➢ *Lời giải tự luận 4:* Ta có điều kiện:

$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow$ Đặt $x = \sin^2 t$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Khi đó, hàm số được chuyển về dạng:

$$y = \sqrt{\sin^2 t} + \sqrt{1 - \sin^2 t} = |\sin t| + |\cos t| \overset{t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]}{=} \sin t + \cos t$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \overset{t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]}{\geq} 1, \text{ do nhận thấy } \frac{\pi}{4} \leq t + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$$

Suy ra Min y = 1 đạt được khi:

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \overset{t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \\ t + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}\right..$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt thử:

▪ Với y = 1, ta có phương trình:

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x(1-x)} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1.$$

Tức là, hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

☞ Chú ý: Để tối ưu thời gian lựa chọn đáp án đúng cho một câu hỏi trắc nghiệm thuần túy các em học sinh đều đã biết tới *phương pháp trích lược tự luận*. Cụ thể ở đây là việc bỏ qua bước "*đạt được khi*" nếu khẳng định được sự tồn tại giá trị x_0 thuộc tập điều kiện D sao cho $y(x_0)$ bằng giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất cần tìm.

Bài 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 4$ trên đoạn $[0; \pi]$ bằng:

A. 8 đạt tại $x = \frac{\pi}{6}$.

B. 6 đạt tại $x = \frac{\pi}{6}$.

C. 8 đạt tại $x = \frac{\pi}{3}$.

D. 6 đạt tại $x = \frac{\pi}{3}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Xét hàm số trên tập $D = [0; \pi]$.

▪ Đạo hàm: $y' = \cos x - \sqrt{3}\sin x$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow \cot x = \sqrt{3} \overset{x \in D}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{6}.$$

Ta có: $y(0) = 4 + \sqrt{3}$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6$, $y(\pi) = 4 - \sqrt{3}$.

Khi đó, ta có:

$\underset{x\in D}{\text{Max}}\, y = \text{Max}\left\{4+\sqrt{3}, 6, 4-\sqrt{3}\right\} = 6$, đạt được khi $x = \frac{\pi}{6}$.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) + 4 = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \le 2 + 4 = 6.$$

Suy ra $\underset{x\in[0;\,\pi]}{\text{Max}}\, y = 6$, đạt được khi:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1 \overset{x\in[0;\,\pi]}{\Leftrightarrow} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

➢ ***Lời giải tự luận 3:*** Biến đổi hàm số về dạng:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = y - 4. \qquad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$1 + 3 \ge (y-4)^2 \Leftrightarrow (y-4)^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le y - 4 \le 2 \Leftrightarrow 2 \le y \le 6.$$

Suy ra $\underset{x\in[0;\,\pi]}{\text{Max}}\, y = 6$, đạt được khi:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\overset{x\in[0;\,\pi]}{\Leftrightarrow} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với y = 8, ta có phương trình:

$8 = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 4 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 4$, vô nghiệm do $a^2 + b^2 < c^2$

⇒ Các đáp án A và C bị loại.

▪ Với y = 6, ta có phương trình:

$$6 = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 4 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1 \overset{x\in[0;\,\pi]}{\Leftrightarrow} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta có:

$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6$ và $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 + \sqrt{3} \Rightarrow \underset{x\in[0;\,\pi]}{\text{Max}}\, y = 6$, đạt tại $x = \frac{\pi}{6}$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Chú ý: Trong lời giải tự luận 3 chúng ta sử dụng kiến thức về điều kiện có nghiệm của phương trình a.sinx + b.cosx = c là $a^2 + b^2 > c^2$.

Bài 12. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$ trên đoạn $[0; \pi]$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. B. $\dfrac{1}{2}$. C. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Xét hàm số trên tập $D = [0; \pi]$.

▪ Đạo hàm:

$$y' = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2},\ y' = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \overset{x \in D}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{3}.$$

Ta có $y(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ y(\pi) = 0$, khi đó:

$$\underset{x \in D}{\text{Max}}\, y = \text{Max}\left\{0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{đạt được khi } x = \frac{\pi}{3}.$$

➢ *Lời giải tự luận 2:* Biến đổi hàm số về dạng: $\sin x + y.\cos x = 2y$. (*)

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi: $1 + y^2 \geq 4y^2 \Leftrightarrow 3y^2 \leq 1 \Leftrightarrow |y| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Suy ra $\underset{x \in D}{\text{Max}}\, y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, đạt được khi:

$$\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}.\cos x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}.\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\overset{x \in D}{\Leftrightarrow} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ta có phương trình:

$$\frac{\sin x}{2 - \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x + \cos x = 2,\ \text{vô nghiệm do } a^2 + b^2 < c^2$$

$\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

▪ Với $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, ta có phương trình:

$$\frac{\sin x}{2 - \cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}.\cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \overset{x \in [0;\, \pi]}{\Leftrightarrow} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 13. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^2 2x - \sin x.\cos x + 4$ bằng:

A. 3 đạt tại $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $\frac{7}{2}$ đạt tại $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. 3 đạt tại $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

D. $\frac{7}{2}$ đạt tại $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đặt $t = \sin 2x$, điều kiện $|t| \le 1$. Hàm số có dạng:

$$y = (1 - \sin^2 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x + 4 = -t^2 - \frac{1}{2}t + 5.$$

▪ Đạo hàm:

$$y' = -2t - \frac{1}{2}, \qquad y' = 0 \Leftrightarrow -2t - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}.$$

Ta có $y(-1) = \frac{9}{2}$, $y\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{81}{16}$, $y(1) = \frac{7}{2}$ khi đó:

$$\underset{x \in R}{\text{Min}}\, y = \text{Min}\left\{\frac{9}{2}, \frac{81}{16}, \frac{7}{2}\right\} = \frac{7}{2} \text{ đạt được khi } t = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

➢ *Lời giải tự luận 2:* Đặt $t = \sin 2x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Hàm số được viết lại dưới dạng:

$$y = (1 - \sin^2 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x + 4 = -t^2 - \frac{1}{2}t + 5 = \frac{81}{16} - \left(t + \frac{1}{4}\right)^2 \ge \frac{81}{16} - \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{2}.$$

Suy ra $\underset{x \in R}{\text{Min}}\, y = \frac{7}{2}$, đạt được khi: $t = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

➢ *Lời giải tự luận 3:* Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = (1 - \sin^2 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x + 4 = -\sin^2 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + 5$$

$$= \frac{81}{16} - \left(\sin 2x + \frac{1}{4}\right)^2 \ge \frac{81}{16} - \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{2}.$$

Suy ra $\underset{x \in R}{\text{Min}}\, y = \frac{7}{2}$, đạt được khi:

$$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = (1 - \sin^2 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x + 4 \Leftrightarrow 2\sin^2 2x + \sin 2x + 2y - 10 = 0.$$

Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $y = 3$, ta có phương trình: $2\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0$, vô nghiệm do $|\sin 2x| \le 1$

$\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

▪ Với $y = \frac{7}{2}$, ta có phương trình:

$$2\sin^2 2x + \sin 2x - 3 = 0 \overset{|\sin 2x| \le 1}{\Leftrightarrow} \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta có:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{17 - \sqrt{3}}{4} \text{ và } y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{2} \Rightarrow \underset{x \in R}{\text{Min}}\, y = \frac{7}{2}, \text{ đạt tại } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài tập tương tự: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$ *bằng:*

A. 3 đạt tại $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. 2 đạt tại $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

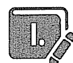
C. 3 đạt tại $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. 2 đạt tại $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

Đề nghị học sinh thực hiện theo 5 cách như trong bài 13.

§4 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang

Định nghĩa 1: Đường thẳng $y = y_0$ *được gọi là đường tiệm cận ngang* (gọi tắt là *tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số* $y = f(x)$ *nếu:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0.$$

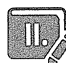
Định nghĩa 2: Đường thẳng $x = x_0$ *được gọi là đường tiệm cận đứng* (gọi tắt là *tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số* $y = f(x)$ *nếu:*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \text{ hoặc } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

2. Đường tiệm cận xiên

Định nghĩa 3: Đường thẳng $y = ax + b$ *được gọi là đường tiệm cận xiên* (gọi tắt là *tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số* $y = f(x)$ *nếu:*

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$



II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Từ đó, ta nhận được kết luận:

- Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng vì $\lim_{x\to1} y = \infty$.
- Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang vì $\lim_{x\to\infty} y = 0$.

Vậy, đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Dựa trên tính chất của hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất (luôn có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang) nên ta kết luận ngay hàm số có 2 đường tiệm cận.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận* chúng ta sử dụng phương pháp đã được học để tìm ra cụ thể hai đường tiệm cận cho đồ thị hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất.
- *Trong cách giải bằng phép đánh giá* chúng ta loại trừ ngay được các đáp án A, B và D thông qua tính chất về số đường tiệm cận của mọi đồ thị hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất - *Đây là dạng hàm số cơ bản được trình bày trong SGK.*

Tuy nhiên, để tăng độ khó cho câu hỏi trắc nghiệm nó thường được phát biểu dưới dạng "*Hãy lựa chọn phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số*".

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Từ đó, ta nhận được kết luận:

- Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x \to 2} y = \infty$.
- Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên vì $\lim\limits_{x \to \infty} \left[y - (x+1)\right] = 0$.

Vậy, đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Dựa trên tính chất của hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất (luôn có một tiệm cận đứng và một tiệm cận xiên) nên ta kết luận ngay hàm số có 2 đường tiệm cận.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận,* chúng ta sử dụng phương pháp đã được học để tìm ra cụ thể hai đường tiệm cận cho đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất.
- *Trong cách giải bằng phép đánh giá,* chúng ta loại trừ ngay được các đáp án A, B và D thông qua tính chất về số đường tiệm cận của mọi đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất - *Đây là dạng hàm số cơ bản được trình bày trong SGK.*

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Hàm số được biến đổi về dạng: $y = \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x+1}$ = 2x - 1.

Vậy, đồ thị hàm số không có tiệm cận.

☞ Chú ý: *Rất nhiều em học sinh khi thực hiện bài toán trên đã lựa chọn ngay đáp án C bởi ngộ nhận đó là hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất. Do đó, để tránh nhầm lẫn không đáng có các em hãy thực hiện phép biến đổi (chia đa thức):*

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = kx + l + \frac{m}{dx + e}.$$

Khi đó:

- Nếu $m \neq 0$ thì đồ thị hàm số mới có hai tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cân xiên).
- Nếu $m = 0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Ngoài ra, để tối ưu thời gian ta đi thay giá trị $x = -\frac{e}{d}$ vào tử số để xét tính suy biến của hàm số.

Bài 4. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - (m+2)x + 2}{x - 1}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Hàm số được biến đổi về dạng: $y = \frac{(x-1)(mx-2)}{x-1}$ = mx - 2.

Vậy, đồ thị hàm số không có tiệm cận.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá 1*: Thay x = 1 vào tử số, ta thấy:

$m - (m + 2) + 2 = 0 \Rightarrow$ Hàm số suy biến thành hàm bậc nhất.

Vậy, đồ thị hàm số không có tiệm cận nên việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá 2*: Nhận thấy phương trình TS = 0 có nghiệm x = 1 (bởi a + b + c = 0) tức hàm số suy biến thành hàm bậc nhất.

Vậy, đồ thị hàm số không có tiệm cận nên việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 5. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-9}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$.

Từ đó, ta nhận được kết luận:

- Các đường thẳng $x = \pm 3$ là tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x \to \pm 3} y = \infty$.
- Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang vì $\lim\limits_{x \to \infty} y = 0$.

Vậy, đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên trong cách giải tự luận, chúng ta sử dụng định nghĩa để tìm ra cụ thể ba đường tiệm cận cho đồ thị hàm số.

Tuy nhiên, nếu các em học sinh có thêm kiến thức về tiệm cận của đồ thị hàm phân thức tổng quát $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ với u(x) và v(x) không có nghiệm chung thì có thể lựa chọn được đáp án đúng bằng phép đánh giá, cụ thể:

- Nếu phương trình $v(x) = 0$ có nghiệm $x = x_0$, thì đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Số nghiệm phân biệt của phương trình $v(x) = 0$ là số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- Nếu bậc u(x) nhỏ hơn hoặc bằng bậc v(x) thì đồ thị hàm số còn có tiệm cận ngang, có phương trình $y = a$, được xác định bởi $a = \lim\limits_{x \to \infty} y$.
- Nếu bậc u(x) lớn hơn bậc v(x) (giả sử $u(x) = g(x)v(x) + h(x)$), thì $\lim\limits_{x \to \infty} [y - g(x)] = 0$ ⇔ Đường $y=g(x)$ là tiệm cận của đồ thị hàm số. Khi đó:

  - Nếu bậc g(x) bằng 1 thì $y = g(x)$ là phương trình tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
  - Nếu bậc g(x) lớn hơn 1 thì $y = g(x)$ là phương trình tiệm cận cong của đồ thị hàm số.

Bài 6. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x^2}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Từ đó, ta nhận được kết luận:

- Đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng vì $\lim\limits_{x \to 0} y = \infty$.

■ Đường thẳng y = 0 là tiệm cận ngang vì $\lim_{x\to\infty} y = 0$.

Vậy, đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Nhận thấy TS và MS không có nghiệm chung và phương trình MS = 0 có một nghiệm nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận (một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang).

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 7. Cho hàm số $y = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 4}{x^2 - x - 2}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = x - 1 + \frac{2}{x^2 - x - 2} \Leftrightarrow y = x - 1 + \frac{2}{(x+1)(x-2)}.$$

Từ đó, ta nhận được kết luận:

■ Đường thẳng x = -1 là tiệm cận đứng vì $\lim_{x\to -1} y = \infty$.

■ Đường thẳng x = 2 là tiệm cận đứng vì $\lim_{x\to 2} y = \infty$.

■ Đường thẳng y = x - 1 là tiệm cận xiên vì $\lim_{x\to\infty} \left[y - (x-1)\right] = 0$.

Vậy, đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Xét phương trình MS = 0, cụ thể:

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$.

Khi đó:

■ Với x = -1 thì TS = 2 nên x = -1 không là nghiệm của phương trình TS = 0.

■ Với x = 2 thì TS = 2 nên x = 2 không là nghiệm của phương trình TS = 0.

Như vậy TS và MS không có nghiệm chung và phương trình MS = 0 có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số có ba tiệm cận (hai tiệm cận đứng và một tiệm cận xiên).

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Xét phương trình MS = 0, cụ thể:

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$.

▪ Nhập TS = $x^3 - 2x^2 - x + 4$ ta ấn:

ALPHA X ^ 3 − 2 ALPHA X x^2 − ALPHA X + 4

▪ Khi đó, ta lần lượt với các giá trị x = -1 và x = 2:

CALC (−) 1 = → −1

CALC 2 = → 2

Như vậy TS và MS không có nghiệm chung và phương trình MS = 0 có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số có ba tiệm cận (hai tiệm cận đứng và một tiệm cận xiên).

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta lần lượt xét các phương trình:

$x^3 - 2x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x \approx -1.2695$ bằng cách ấn:

MODE 1

MODE MODE MODE 1 ▶ 3

1 = (−) 2 = (−) 1 = 4 = → −1.2695

▼ → R↔I

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$ bằng cách ấn:

MODE MODE MODE 1 ▶ 2

1 = (−) 1 = (−) 2 = → 2

▼ → −1

Như vậy TS và MS không có nghiệm chung và phương trình MS = 0 có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số có ba tiệm cận.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 8. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Điều kiện:

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$$

▪ Giả sử (d_1): $y = a_1x + b_1$ *là tiệm cận xiên bên phải* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = -1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}(y - ax) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1} + x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0.$$

Vậy, đường thẳng (d_1): $y = -x$ là tiệm cận xiên bên phải của (C).

▪ Giả sử (d_2): $y = a_2x + b_2$ *là tiệm cận xiên bên trái* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}(y - ax) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1} - x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0.$$

Vậy, đường thẳng (d_2): $y = x$ là tiệm cận xiên bên trái của (C).

Vậy, đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên trong cách giải tự luận, chúng ta sử dụng định nghĩa để tìm ra cụ thể hai đường tiệm cận cho đồ thị hàm số.

Tuy nhiên, nếu các em học sinh có thêm kiến thức về tiệm cận của đồ thị hàm vô tỉ dạng $y = \sqrt{Ax^2 + Bx + C}$ $(A \neq 0)$ thì có thể lựa chọn được đáp án đúng bằng phép đánh giá, cụ thể ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $A < 0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận bởi vì khi đó cả tập xác định và miền giá trị của hàm số đều không chứa ∞.

Trường hợp 2: Nếu $A > 0$ ta xét hai khả năng:

▪ *Khả năng 1*: Nếu $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ thì hàm số có dạng:

$y = \sqrt{A}\left|x - \frac{B}{2A}\right| \Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

▪ *Khả năng 2*: Nếu $\Delta = B^2 - 4AC \neq 0$ thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận xiên, được xác định như sau:

Giải sử (d): $y = ax + b$ là tiệm cận xiên bên phải của đồ thị hàm số. Khi đó:

$$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}{x} = -\sqrt{A}.$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}[\sqrt{Ax^2+Bx+C} + x\sqrt{A}]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{Bx+C}{\sqrt{Ax^2+Bx+C} - x\sqrt{A}} = -\frac{B}{2\sqrt{A}}$$

Giả sử (d): $y = ax + b$ là tiệm cận xiên bên trái của đồ thị hàm số.

Khi đó:

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}{x} = \sqrt{A}.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [\sqrt{Ax^2 + Bx + C} - x\sqrt{A}]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{Bx + C}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C} + x\sqrt{A}} = \frac{B}{2\sqrt{A}}.$$

Nếu việc tìm tiệm cận xiên không phải là mục đích chính của bài, thì có thể sử dụng ngay kết quả trên, như sau:

- Khi $x \to -\infty$, đồ thị có tiệm cận xiên bên phải $y = -(x\sqrt{A} + \frac{B}{2\sqrt{A}})$.
- Khi $x \to +\infty$, đồ thị có tiệm cận xiên bên trái $y = x\sqrt{A} + \frac{B}{2\sqrt{A}}$.

Phương pháp trên được mở rộng cho lớp hàm số dạng:

$$y = cx + d \pm \sqrt{Ax^2 + Bx + C};\ y = \sqrt[n]{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}.$$

Bài 9. Cho hàm số $y = \frac{\cos x}{x}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Từ đó, ta nhận được:

- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$ vì $\lim_{x\to 0} y = \infty$.
- Ta có: $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|}$ và $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$\Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy, đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Bài 10. Cho hàm số $y = 8^{x^3+1}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Mặt khác, ta có:

$\lim_{x\to-\infty} y = 0$, suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang bên phải của đồ thị hàm số.

$\lim_{x\to+\infty} y = \infty$, suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang bên trái.

Vậy, đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.

Bài 11. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$. Phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. x = -2 và y = -1.　　B. x = -2 và y = 1.

C. x = 2 và y = -1.　　D. x = 2 và y = 1.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Từ đó, ta nhận được kết luận:

- Đường thẳng x = -2 là tiệm cận đứng vì $\lim_{x \to -2} y = \infty$.
- Đường thẳng y = 1 là tiệm cận ngang vì $\lim_{x \to \infty} y = 1$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá 1*: Với hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, ta lần lượt có:

- Tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c} = 1$ nên các đáp án A và C bị loại.
- Tiệm cận đứng là $x = -\frac{d}{c} = -2$ nên đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá 2*: Ta lần lượt đánh giá:

- Hàm số xác định tại x = 2 nên không thể nhận đường thẳng x = 2 làm tiệm cận, suy ra các đáp án C và D bị loại.
- Hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c} = 1$ nên đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận,* chúng ta thực hiện theo đúng phương pháp đã được học trong SGK để tìm hai đường tiệm cận của hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất.
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1,* chúng ta sử dụng lần lượt công thức về hai đường tiệm cận của hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất để loại bỏ dần các đáp án.
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 2,* thì ở nhận xét đầu tiên chúng ta loại được các đáp án C và D bởi điểm x = 2 vẫn thuộc tập xác định của hàm số. Cuối cùng, bằng việc sử dụng công thức về phương trình đường tiệm cận ngang, chúng ta loại bỏ được đáp án A (ở đây chúng ta không sử dụng công thức về phương trình đường tiệm cận đứng bởi chúng giống nhau trong hai đáp án).

Bài 12. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x + 1}$. Phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. x = -1 và y = x - 4.
B. x = -1 và y = -x + 4.
C. x = 1 và y = -x - 4.
D. x = 1 và y = x + 4.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Viết lại hàm số dưới dạng: $y = x - 4 + \frac{8}{x + 1}$

Từ đó, ta nhận được kết luận:

▪ Đường thẳng x = -1 là tiệm cận đứng vì $\lim_{x \to -1} y = \infty$.

▪ Đường thẳng y = x - 4 là tiệm cận xiên vì $\lim_{x \to \infty} [y - (x - 4)] = 0$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng trích lược tự luận:* Ta có phép biến đổi hàm số:

$$y = x - 4 + \frac{8}{x + 1} \Rightarrow y = x - 4 \text{ là tiệm cận xiên của đồ thị.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá 1*: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Hàm số xác định tại x = 1 nên không thể nhận đường thẳng x = 1 làm tiệm cận, suy ra các đáp án C và D bị loại.

▪ Hàm phân thức $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có tiệm cận xiên là y = Ax + B, với $A = \frac{a}{d} = 1$ nên đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá 2*: Với hàm phân thức $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$, ta lần lượt có:

▪ Tiệm cận xiên là y = Ax + B, với $A = \frac{a}{d} = 1$ nên các đáp án B và C bị loại.

▪ Tiệm cận đứng là $x = -\frac{e}{d} = -1$ nên đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận* chúng ta thực hiện theo đúng phương pháp đã được học trong sgk để tìm hai đường tiệm cận của hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng trích lược tự luận*, được hiểu là *phép nháp nhanh*

để đạt được mục tiêu đề ra cho dạng câu hỏi này với mọi hàm phân thức $y = \frac{u(x)}{v(x)}$, cụ thể chúng ta thực hiện phép chia đa thức để chuyển hàm số về dạng:

$y = f(x) + \frac{u_1(x)}{v(x)}$, với $u_1(x)$ có bậc nhỏ hơn $v(x)$

Khi đó, ta thấy ngay:

- $y = f(x)$ là một tiệm cận của đồ thị.
- Các đường tiệm cận đứng là nghiệm (nếu có) của phương trình $v(x) = 0$.

Phương pháp này luôn được ưu tiên lựa chọn vì nó giúp chỉ ra được đáp án đúng một cách nhanh nhất. Tuy nhiên, để tránh sai sót không đáng có, các em học sinh hãy thận trọng ở bước chia đa thức.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* thì ở nhận xét đầu tiên chúng ta loại được các đáp án C và D bởi điểm $x = 1$ vẫn thuộc tập xác định của hàm số. Cuối cùng, bằng việc sử dụng công thức về phương trình đường tiệm cận xiên, chúng ta loại bỏ được đáp án B (ở đây chúng ta không sử dụng công thức về phương trình đường tiệm cận đứng bởi chúng giống nhau trong hai đáp án).

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 2,* chúng ta sử dụng lần lượt công thức về hai đường tiệm cận của hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất để loại bỏ dần các đáp án.

Việc lựa chọn đáp án đúng bằng những phép thử khác nhau phụ thuộc rất nhiều vào cách cho các lựa chọn trắc nghiệm, chúng ta sẽ thấy được nhận xét này ở bài toán sau.

Bài 13. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. $y = x + \frac{1}{4}$ và $y = -x - \frac{1}{4}$.

B. $y = x + 1$ và $y = -x - 1$.

C. $y = x + \frac{1}{2}$ và $y = -x - \frac{1}{2}$.

D. $y = x + 2$ và $y = -x - 2$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Giả sử (d_1): $y = a_1x + b_1$ *là tiệm cận xiên bên phải* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = -1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty} [y - ax] = \lim_{x\to-\infty} [\sqrt{x^2+x+1} + x] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy, đường thẳng (d_1): $y = -x - \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên bên phải của (C).

▪ Giả sử (d_2): $y = a_2x + b_2$ *là tiệm cận xiên bên trái* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty} [y - ax] = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+x+1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1}{2}.$$

Vậy, đường thẳng (d_2): $y = x + \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên bên trái của (C).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng trích lược tự luận:* Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Giả sử (d_1): $y = a_1x + b_1$ *là tiệm cận xiên bên phải* của đồ thị hàm số, ta có:

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = -1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty} [y - ax] = \lim_{x\to-\infty} [\sqrt{x^2+x+1} + x] = -\frac{1}{2}.$$

Vậy, đường thẳng (d_1): $y = -x - \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên bên phải.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn (bởi đường tiệm cận này chỉ có duy nhất trong đáp án C).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta biết rằng đồ thị của hàm số luôn có hai tiệm cận xiên dạng $y = a_ix + b_i$, $i = 1, 2$ với:

$$b_i = \pm\frac{B}{2\sqrt{A}} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Các đáp án A, B và D bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận* chúng ta thực hiện theo đúng phương pháp đã biết để tìm các đường tiệm cận của hàm vô tỉ.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* chúng ta cũng sử dụng kiến thức thu nhận được trong nhận xét của bài 4.

Tuy nhiên, các em học sinh dễ nhận thấy rằng:

- Phương pháp tự luận sẽ mất nhiều thời gian. Ngoài ra, rất nhiều em học sinh không có được kĩ năng tốt để thực hiện bởi trong SGK trình bày rất sơ lược.

- Phương pháp nháp nhanh cho dù giảm được một nửa thời gian (ở bài toán này) nhưng vẫn dễ gây nhầm lẫn trong tính toán. Ngoài ra, nếu có nhiều hơn một kết quả trắc nghiệm chứa phương trình $y = -x - \frac{1}{2}$ thì không thể giảm được thời gian.

- Phương pháp lựa chọn đáp án bằng phép thử sử dụng kiến thức không được trình bày trong SGK nên hẳn nhiều em học sinh không biết hoặc không còn nhớ.

Do vậy, chúng ta sẽ quan tâm tới việc sử dụng định nghĩa để lựa chọn được đáp án đúng trong *phương pháp lựa chọn đáp án bằng phép thử* ở bài toán tiếp theo.

Bài 14. Cho hàm số $y = \frac{(m^2+1)x+4}{x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận khi:

A. $m \neq -1$. B. $m \neq 1$. C. $m \neq \pm 1$. D. Mọi m.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Viết lại hàm số dưới dạng: $y = m^2 + 1 - \frac{2m^2-2}{x+2}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận khi và chỉ khi:

$$2m^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$$

Vậy, với $m \neq \pm 1$ đồ thị hàm số có tiệm cận.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Đồ thị hàm số có tiệm cận khi và chỉ khi:

TS và MS không có nghiệm chung $\Leftrightarrow (m^2+1)(-2) + 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Vậy, với $m \neq \pm 1$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

- Với $m = -1$, hàm số có dạng:

  $y = \frac{2x+4}{x+2} = 2 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận

  $\Rightarrow$ Các đáp án B và D bị loại.

- Với $m = 1$, hàm số có dạng:

  $y = \frac{2x+4}{x+2} = 2 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận

  $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 15. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - mx + m^2 + m}{x-1}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên khi:

A. $m \neq -1$ và $m \neq 2$. B. $m \neq 1$ và $m \neq 2$.

C. $m \neq -1$ và $m \neq 0$. D. $m \neq 1$ và $m \neq 0$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = mx + \frac{m^2+m}{x-1}.$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Vậy, với m ≠ 0 và m ≠ -1, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên khi và chỉ khi:

TS là tam thức bậc hai không chia hết cho mẫu số

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m - m + m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Vậy, với m ≠ 0 và m ≠ -1 đồ thị hàm số có tiệm cận xiên.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

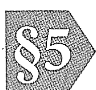
- Với m = 0, hàm số có dạng:

  $y = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên $\Rightarrow$ Các đáp án A và B bị loại.

- Với m = 1, hàm số có dạng:

  $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 1} = x + \dfrac{2}{x - 1} \Rightarrow y = x$ là tiệm cận xiên $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.



§5 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ - PHÉP TỊNH TIẾN HỆ TỌA ĐỘ



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Điểm uốn của đồ thị

Để tìm điểm uốn của đồ thị ta sử dụng kết quả sau:

Định lí: Cho hàm số $y = f(x)$ *có đạo hàm cấp một liên tục trên* $(a; b)$ *và có đạo hàm đến cấp hai trên các khoảng* $(a; x_0)$ *và* $(x_0; b)$. *Nếu* $f''(x)$ *đổi dấu khi* x *qua điểm* x_0 *thì* $I(x_0; f(x_0))$ *là một điểm uốn của đồ thị hàm số* $y = f(x)$.

☞ Nhận xét:

1. Tại điểm uốn, tiếp tuyến của đồ thị phải xuyên qua đồ thị.

2. Điểm x_0 không nhất thiết phải là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

2. Phép tịnh tiến hệ toạ độ

2.1. Công thức chuyển hệ toạ độ

Cho điểm $I(x_0; y_0)$ và điểm $M(x; y)$ trong hệ toạ độ Oxy, khi đó trong hệ toạ độ IXY điểm M sẽ có toạ độ: $\begin{cases} X_M = x - x_0 \\ Y_M = y - y_0 \end{cases}$

2.2. Phương trình của đường cong $y = f(x)$ *đối với hệ toạ độ IXY*

Ta có kết quả: $Y = f(X + x_0) - y_0$



II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$ có số điểm uốn bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▫ Đạo hàm: $y' = x^2 + 2x$, $y'' = 2x + 2$. $y'' = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0$. (*)

Vì phương trình (*) luôn có một nghiệm nên đồ thị hàm số có một điểm uốn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Số điểm uốn của các hàm đa thức bằng số nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và đổi dấu qua nghiệm đó. Với hàm số bậc ba

($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$) thì $y'' = 6ax + 2b$ nên phương trình $y'' = 0$ có một nghiệm và qua đó y" đổi dấu. Nên đồ thị hàm số có một điểm uốn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận* chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm tập xác định D.

Bước 2: Tính đạo hàm y', y" rồi xét xem phương trình $y'' = 0$ có bao nhiêu nghiệm và qua đó y" đổi dấu.

Bước 3: Kết luận về số điểm uốn của đồ thị hàm số.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* chúng ta nhận định rằng các hàm đa thức bậc ba luôn có y" là một nhị thức bậc nhất (phương trình bậc nhất $ax + b = 0$ với $a \neq 0$) nên luôn có một điểm uốn.

Tổng quát: Hàm đa thức bậc k ($k \geq 2$) sẽ có phương trình $y'' = 0$ là một phương trình bậc k - 2, do đó sẽ có tối đa k - 2 điểm uốn.

Bài 2. Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có số điểm uốn bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 2x$, $y'' = 12x^2 - 2$. $y'' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 2 = 0$. (*)

Vì phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số có hai điểm uốn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Với hàm trùng phương ($y = ax^4 + bx^2 + c$) thì $y'' = 12ax^2 + 2b$ và vì a và b trái dấu nên phương trình $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và qua đó đổi dấu. Nên đồ thị hàm số có hai điểm uốn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận* chúng ta thực hiện theo hai bước như trong bài 1.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* chúng ta nhận định rằng các hàm đa thức bậc bốn dạng trùng phương luôn có y" là một tam thức bậc hai dạng $12ax^2 + 2b = 0$ với $a \neq 0$) nên luôn có một hoặc hai điểm uốn, tùy thuộc vào dấu giữa a và b.

Bài 3. Đồ thị hàm số $y = x^4 + 8x^2 + 10$ có số điểm uốn bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = 4x^3 + 16x$, $y'' = 12x^2 + 16$. $y'' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 16 = 0$. (*)

Vì phương trình (*) vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có điểm uốn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Với hàm trùng phương có ab > 0, nên đồ thị hàm số không có điểm uốn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 4. Đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ có số điểm uốn bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y'' = -\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$.

Vì y" đổi dấu khi qua $x_0 = 0 \in D$ nên đồ thị hàm số có một điểm uốn.

☞ Chú ý: Rất nhiều em học sinh sau khi thực hiện tính y' và y", rồi thiết lập phương trình y" = 0 và thấy nó vô nghiệm nên đã kết luận hàm số không có điểm uốn.

Bài 5. Đồ thị hàm số y = cosx có số điểm uốn bằng:

A. 0. B. 1. C. 100. D. Vô số.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$.

$y'' = 0 \Leftrightarrow -\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ vô số nghiệm.

Vậy, đồ thị hàm số có vô số điểm uốn.

Bài 6. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 4x - 1$. Điểm uốn của đồ thị hàm số là:

A. $U\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{27}\right)$. B. $U\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{8}\right)$. C. $U\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{8}\right)$. D. $U\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{7}{27}\right)$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm:

$y' = 3x^2 - 2x + 4$,

$y'' = 6x - 2$,

$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_U = \frac{1}{3} \Rightarrow$ Điểm uốn $U\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{27}\right)$.

☞ Chú ý:

1. Việc sử dụng máy tính CASIO fx - 570MS tính tung độ của điểm uốn trong bài toán trên được thực hiện bởi một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta ấn:

[( ] 1 [ab/c] 3 [ )] [^] 3 [−] [( ] 1 [ab/c] 3 [ )] [x²] [+] 4 [×] 1 [ab/c] 3 [−] 1
[=] 7┘27

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

▪ Nhập hàm số $y = x^3 - x^2 + 4x - 1$ ta ấn:

[ALPHA] [X] [^] 3 [−] [ALPHA] [X] [x²] [+] 4 [ALPHA] [X] [−] 1

▪ Khi đó, để có được $y\left(\frac{1}{3}\right)$ ta ấn:

[CALC] 1 [ab/c] 3 [=] 7┘27

2. Trong bài tập 5 chúng ta có thể sử dụng *phương pháp trích lược tự luận,* bởi trong bốn đáp án chỉ có đáp án C chứa $x = -1$, còn trong bài toán này thì không thể bởi cả hai đáp án A và D đều có $x = \frac{1}{3}$.

Bài 7. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$. Các điểm uốn của đồ thị hàm số là:

A. $U_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{7}{9}\right)$ và $U_2\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{7}{9}\right)$.

B. $U_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{9}\right)$ và $U_2\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{9}\right)$.

C. $U_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{5}{9}\right)$ và $U_2\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{5}{9}\right)$.

D. $U_1\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{9}\right)$ và $U_2\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{9}\right)$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm:

$y' = 4x^3 - 8x$, $y'' = 12x^2 - 8$, $y'' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy, đồ thị hàm số có hai điểm uốn là $U_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{7}{9}\right)$ và $U_2\left(\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{7}{9}\right)$.

☞ Chú ý: Việc sử dụng máy tính CASIO fx - 570MS tính tung độ của điểm uốn trong bài toán trên được thực hiện bởi một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

▪ Nhập hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ ta ấn:

ALPHA X ^ 4 – 4 ALPHA X x^2 + 3

▪ Khi đó, để có được $y\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $y\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ta ấn:

CALC (–) (√ 6) $a^{b/c}$ 3 = 7⌟9

CALC (√ 6) $a^{b/c}$ 3 = 7⌟9

Cách 2: Vì với hàm trùng phương $y\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = y\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ nên ta chỉ cần ấn:

((√ 6) $a^{b/c}$ 3) ^ 4 – 4 × ((√ 6) $a^{b/c}$ 3) x^2 + 3 = 7⌟9

Bài 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + x + 4m$. Điểm U(1; 3) là điểm uốn của đồ thị hàm số khi m nhận giá trị bằng:

A. m = 0. B. m = 1. C. m = 2. D. Vô nghiệm.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6mx + 1$, $y'' = 6x - 6m$.

Để điểm U(1; 3) là điểm uốn của đồ thị điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} y''(1) = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 6m = 0 \\ 1 - 3m + 1 + 4m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với m = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với m = 0 hàm số có dạng: $y = x^3 + x$.

Suy ra:

$y' = 3x^2 + 1$, $y'' = 6x$, $y'' = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x_U = 0 \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

▪ Với m = 1 hàm số có dạng $y = x^3 - 3x^2 + x + 4$.

Suy ra: $y' = 3x^2 - 6x + 1$, $y'' = 6x - 6$,

$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_U = 1$ và $y_U = 3 \Rightarrow$ U(1; 3), thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận,* chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định các đạo hàm y' và y''.

Bước 2: Thiết lập điều kiện để đồ thị hàm số nhận điểm U làm điểm uốn.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* chúng ta thực hiện từ trái qua phải và cần tới hai lần thử mới lựa chọn được đáp án đúng.

☞ Hoạt động: Các em học sinh hãy đề xuất một phép thử khác dựa trên tính chất điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba (Điểm uốn là tâm đối xứng).

☞ Chú ý: Ta có các kết quả:

1. Đồ thị hàm số bậc ba nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

2. Đồ thị hàm số bậc bốn dạng trùng phương nhận trục Oy làm trục đối xứng.

3. Đồ thị các hàm phân thức nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Bài 9. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm:

A. (1; 4). B. (1; 5). C. (-1; 1). D. (-1; 3).

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta lần lượt có:

$y' = 3x^2 + 6x$, $y'' = 6x + 6$.

$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y(-1) = 3$.

Vậy, đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm I(-1; 3).

☞ Hoạt động: 1. Bạn An thực hiện phép thử như sau:

Với x = 1, ta được y(1) = 5.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Khi so với đáp án đúng, chúng ta thấy ngay việc lựa chọn B là sai. Câu hỏi đặt ra là "*Sai lầm của An xuất phát từ đâu?*".

2. Bạn Minh thực hiện phép thử như sau:

Với x = 1, ta được y(1) = 5 ⇒ Đáp án A bị loại.

Với x = -1, ta được y(-1) = 3 ⇒ Đáp án C bị loại.

Nhận thấy, điểm M(-3; 1) thuộc đồ thị. Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Câu hỏi đặt ra là "*Minh dã dựa trên cơ sở gì để tìm ra điểm* M *rồi khẳng định tính đúng đắn trong lựa chọn của mình?*".

Bài 10. Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm:

A. (1; 2). B. (2; 1). C. (1; -1). D. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta lần lượt có:

- Tiệm cận đứng $x = 1$.
- Tiệm cận ngang $y = 2$.

Suy ra, đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm I(1; 2).

➢ *Lời giải tự luận 2:* Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất luôn có tâm đối xứng là:

$I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right) \Rightarrow I(1; 2)$, ứng với đáp án A.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt đánh giá:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ nên tâm đối xứng có hoành độ bằng 1, suy ra các đáp án B và D bị loại.
- Nhận thấy điểm M(0; -3) thuộc đồ thị nhưng điểm N(2; 0) không thuộc đồ thị, suy ra đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Tâm đối xứng có tung độ $y = \frac{a}{c} = 2$, suy ra các đáp án B, C và D bị loại. Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận 1,* chúng ta chuyển nó về việc tìm toạ độ giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số.
- *Trong cách giải tự luận 2,* các em học sinh cần nhớ được công thức về tâm đối xứng của đồ thị hàm số bậc nhất trên bậc nhất.
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1,* ta thực hiện:

- Khẳng định được hoành độ tâm đối xứng bằng 1, ta loại được các đáp án B và D.

- Để lựa chọn giữa A và C, ta lấy điểm M thuộc đồ thị và điểm N đối xứng với M qua điểm I(1 ; -1). Vì N không thuộc đồ thị nên ta đã khẳng định được rằng, điểm I(1 ; -1) không phải là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 2,* với việc khẳng định được tung độ tâm đối xứng bằng 2, ta chỉ ra được ngay đáp án đúng.

Bài 11. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2}$. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm:

A. (0; 1). B. (0; -2). C. (-2; -2). D. (-2; 1).

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Viết lại hàm số dưới dạng: $y = x + \frac{2}{x + 2}$.

Từ đó, ta lần lượt có:

- Tiệm cận đứng x = -2.
- Tiệm cận xiên y = x.

Suy ra, đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm I(-2; -2).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ nên tâm đối xứng có hoành độ bằng -2, suy ra các đáp án A và B bị loại.
- Nhận thấy điểm M(0; 1) thuộc đồ thị nhưng điểm N(-4; 1) không thuộc đồ thị, suy ra đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 12. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 3$. Đồ thị hàm số có trục đối xứng là:

A. x = -1. B. x = 0. C. x = 1. D. x = 2.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Đồ thị hàm số nhận đường thẳng x = 1 ($x = -\frac{b}{2a}$) làm trục đối xứng.

Bài 13. Cho hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$. Đồ thị hàm số có trục đối xứng là:

A. x = -1. B. x = 0. C. x = 1. D. x = 2.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Hàm số là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy: x = 0 làm trục đối xứng.

Bài 14. Cho hàm số $y = |x|^3(x^2 - 1)$. Đồ thị hàm số có trục đối xứng là:

A. x = 0. B. x = 1. C. x = 2. D. x = 3.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Hàm số xác định trên D = $\mathbb{R}$ là tập đối xứng.

Ta có: $f(-x) = |-x|^3[(-x)^2 - 1] = |x|^3(x^2 - 1) = f(x)$

$\Rightarrow y = |x|^3(x^2 - 1)$ là hàm số chẵn.

Do đó, đồ thị hàm số nhận trục Oy: x = 0 làm trục đối xứng.

Bài 15. Cho hàm số $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$. Đồ thị hàm số có trục đối xứng là:

A. x = -3. B. x = 0. C. x = 1. D. x = 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Hàm số xác định trên D = [-1; 1] là tập đối xứng.

Ta có: $f(-x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = f(x) \Rightarrow y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ là hàm chẵn.

Do đó, đồ thị hàm số nhận trục Oy: x = 0 làm trục đối xứng.

☞ Chú ý: Trong trường hợp tổng quát, để chứng minh đồ thị hàm số nhận đường thẳng x = a làm trục đối xứng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với phép biến đổi toạ độ $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$

hàm số có dạng: $Y = f(X + a) \Leftrightarrow Y = f(X)$ (1)

Bước 2: Nhận xét rằng hàm số (1) là hàm số chẵn.

Bước 3: Vậy, đồ thị hàm số nhận đường thẳng x = a làm trục đối xứng.

Bài 16. Cho hàm số $y = x^2 + mx + 1$. Đồ thị hàm số nhận đường thẳng x = 3 làm trục đối xứng khi:

A. m = 3. B. m = 6. C. m = -6. D. m = -3.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Đồ thị hàm số nhận đường thẳng:

$x = -\frac{m}{2}$ làm trục đối xứng $\Rightarrow -\frac{m}{2} = 3 \Leftrightarrow m = -6$.

Vậy, với m = -6 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Bài 17. Cho hàm số $y = x^4 + mx^3 - (m - 1)x^2 + (m^2 - m)x + 1$. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng khi:

A. m = 0. B. m = 1. C. m = 2. D. m = 3.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng khi:

Hàm số là hàm chẵn ⇔ Các hệ số bậc lẻ bằng 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m^2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy, với m = 0 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Bài 18. Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - 2mx + 3m$. Đồ thị hàm số nhận điểm I(1; 1) làm tâm đối xứng khi:

A. m = 0. B. m = 1. C. m = 2. D. m = 3.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

hàm số có dạng: $Y + 1 = (X + 1)^3 - m(X + 1)^2 - 2m(X + 1) + 3m$

$$= X^3 + (3 - m)X^2 + (3 - 4m)X + 1. \quad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số lẻ khi và chỉ khi: 3 - m = 0 ⇔ m = 3.

Vậy, với m = 3 đồ thị hàm số nhận điểm I(1; 1) là tâm đối xứng.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Đồ thị hàm đa thức bậc ba nhận điểm uốn làm tâm đối xứng, nên bài toán được chuyển về "*Tìm m để điểm* I(1; 1) *là điểm uốn*".

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 2mx - 2m$, $y'' = 6x - 2m$.

Để điểm I(1; 1) là điểm uốn của đồ thị điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} y''(1) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2m = 0 \\ 1 - m - 2m + 3m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy, với m = 3 đồ thị hàm số nhận điểm I(1; 1) là tâm đối xứng.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp một phần tự luận*: Ta lần lượt có:

- Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 2mx - 2m$, $y'' = 6x - 2m$.

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 2m = 0 \Leftrightarrow x_I = \frac{m}{3} = 1 \Rightarrow m = 3$$

⇒ Các đáp án A, B và C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 19. Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{x-3}$. Đồ thị hàm số nhận điểm I(3; 1) làm tâm đối xứng khi:

A. m = 0. B. m = 1. C. m = 2. D. m = 3.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Với phép biến đổi toạ độ: $\begin{cases} X = x-3 \\ Y = y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X+3 \\ y = Y+1 \end{cases}$

hàm số có dạng: $Y + 1 = \frac{m(X+3)-1}{X+3-3} \Leftrightarrow Y = \frac{(m-1)X+3m-1}{X}$. (1)

Hàm số (1) là hàm số lẻ khi và chỉ khi:

$m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy, với m = 1 đồ thị hàm số nhận điểm I(3; 1) là tâm đối xứng.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất luôn có tâm đối xứng là:

$I = \left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right) = (3; m) = (3; 1) \Rightarrow m = 1$, ứng với đáp án A.

Bài 20. Gọi I là đỉnh của parabol (P): $y = 2x^2 - 3x + 1$. Phương trình của parabol (P) đối với hệ toạ độ IXY có dạng:

A. $Y = 2X^2$. B. $Y = X^2$. C. $Y = -X^2$. D. $Y = -2X^2$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

▪ Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{8}\right)$.

▪ Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là:

$$\begin{cases} X = x - \frac{3}{4} \\ Y = y + \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + \frac{3}{4} \\ y = Y - \frac{1}{8} \end{cases}$$

và khi đó trong hệ tọa độ IXY parabol (P) có phương trình:

$$(P): Y - \frac{1}{8} = 2\left(X + \frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(X + \frac{3}{4}\right) + 1 \Leftrightarrow (P): Y = 2X^2.$$

Bài 21. Gọi I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C): $y = x^3 + 3x^2 - 4$. Phương trình của đường cong (C) đối với hệ toạ độ IXY có dạng:

A. $Y = X^3 + 3X$. B. $Y = X^3 + X$. C. $Y = X^3 - X$. D. $Y = X^3 - 3X$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

$y' = 3x^2 + 6x,$ $y'' = 6x + 6,$

$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow$ tâm đối xứng I(-1; -2).

Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là:

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 2 \end{cases}$$

và khi đó trong hệ tọa độ IXY (C) có phương trình:

$$(C): Y - 2 = (X - 1)^3 + 3(X - 1)^2 - 4 \Leftrightarrow (C): Y = X^3 - 3X.$$

Bài 22. Gọi I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số (H): $y = \dfrac{3x - 2}{x + 1}$. Phương trình của đường cong (H) đối với hệ toạ độ IXY có dạng:

A. $Y = -\dfrac{5}{X}$. B. $Y = -\dfrac{3}{X}$. C. $Y = \dfrac{3}{X}$. D. $Y = \dfrac{5}{X}$.

Đáp số trắc nghiệm A.

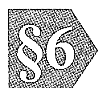
➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt có:

- Hai đường tiệm cận là x = -1 và y = 3, suy ra tâm đối xứng I(-1; 3).
- Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ là:

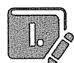
$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 3 \end{cases}$$

và khi đó trong hệ tọa độ IXY (H) có phương trình:

$$(H): Y + 3 = \frac{3(X - 1) - 2}{(X - 1) + 1} \Leftrightarrow (H): Y = -\frac{5}{X}.$$



§6 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Để xét sự tương giao của hai đồ thị: $y = f(x)$ và $y = g(x)$

chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = g(x)$. (1)

Bước 2: Giải hoặc giải và biện luận (1), từ đó đưa ra lời kết luận.



II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 3. Cho hàm số $y = 4x^2 - 6x + 1$. Số giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Phương trình hoành độ giao điểm:

$$4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Vậy, số giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox bằng 2.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp với máy tính* CASIO fx – 570MS: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$4x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 \approx 1.3090 \text{ hoặc } x_2 \approx 0.1909, \text{ bằng cách ấn:}$$

MODE MODE MODE 1 ▶ 2

4 = (–) 6 = 1 = 1.3090

 0.1909

Vậy, số giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox bằng 2.

Bài 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Số giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox bằng:

A. 0. B. 2. C. 3. D. 4.

Đáp số trắc nghiệm C.

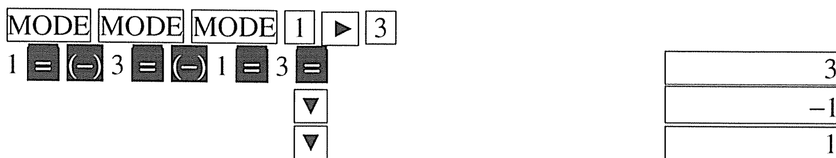
➢ *Lời giải tự luận:* Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = \pm 1.$$

Vậy, số giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox bằng 3.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp với máy tính* CASIO fx – 570MS: Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = \pm 1$, bằng cách ấn:



Vậy, số giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox bằng 3.

☞ Chú ý: Để tăng độ khó cho bài toán, người ta có thể phát biểu dưới dạng:

Dạng 1: Giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x + 3$ với trục Ox có tọa độ là:

A. $(2-\sqrt{5}; 0)$. B. (3; 0). C. $(2+\sqrt{5}; 0)$. D. Cả A, B, C.

Dạng 2: Tổng hoành độ các giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x + 3$ với trục Ox có tọa độ bằng:

A. 3. B. 4. C. 5. D. 7.

Bài 5. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$. Số giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox bằng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$. (1)

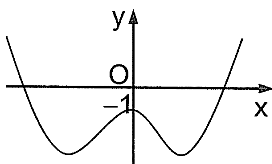
Đặt $t = x^2$, điều kiện $t \geq 0$. Phương trình có dạng: $t^2 - 2t - 1 = 0$. (2)

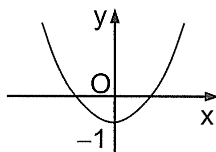
Phương trình (2) có $ac < 0$ nên có hai nghiệm trái dấu ($t_1 < 0 < t_2$, t_1 bị loại) và với t_2, ta được: $x^2 = t_2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{t_2}$.

Vậy, số giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox bằng 2.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Hàm trùng phương nhận Oy làm trục đối xứng và $y(0) = -1$.
- Vì $a = 1 > 0$ nên nó chỉ có thể là:





Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 6. Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 - 1$ và đường thẳng $y = 1 - 3x$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

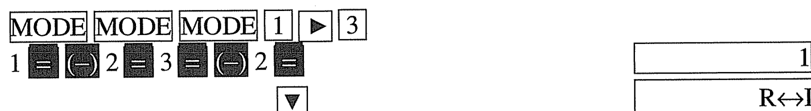
➤ ***Lời giải tự luận:*** Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 2x^2 - 1 = 1 - 3x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, số giao điểm của đồ thị hàm số và đường thẳng bằng 1.

☞ Chú ý: Để sử dụng máy tính CASIO fx - 570MS giải nhanh phương trình (*), ta ấn:



Bài 7. Cho hàm số (C): $y = x^3 + 3x^2 + 1$. Giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng (d): $y = 2x + 5$ có toạ độ là:

A. $(-1; 3)$. B. $(1 - \sqrt{5}; 3 - 2\sqrt{5})$.

C. $(1 + \sqrt{5}; 3 + 2\sqrt{5})$. D. Cả A, B, C.

Đáp số trắc nghiệm D.

➤ ***Lời giải tự luận:*** Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 + 3x^2 + 1 = 2x + 5 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -1 \pm \sqrt{5} \end{array}\right.$$

- Với $x = -1 \Rightarrow y = 3$, được giao điểm $A(-1; 3)$.
- Với $x = -1 - \sqrt{5} \Rightarrow y = 3 - 2\sqrt{5}$, được giao điểm $B(-1 - \sqrt{5}; 3 - 2\sqrt{5})$.
- Với $x = -1 + \sqrt{5} \Rightarrow y = 3 + 2\sqrt{5}$, được giao điểm $C(-1 + \sqrt{5}; 3 + 2\sqrt{5})$.

Vậy, ta được $(d) \cap (C) = \{A, B, C\}$.

➤ ***Lựa chọn đáp án bằng trích lược tự luận:*** Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 + 3x^2 + 1 = 2x + 5 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

Tới đây, ta khẳng định việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn bởi ba giá trị trên tương ứng với hoành độ các điểm trong A, B, C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Điểm A(-1; 3) thuộc cả (C) và (d) nên các đáp án B và C bị loại.
- Điểm B($-1-\sqrt{5}$; $3-2\sqrt{5}$) thuộc cả (C) và (d) nên đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

☞ Chú ý: Để sử dụng máy tính CASIO fx - 570MS thử toạ độ của các điểm A và B cho (C), ta lần lượt thực hiện:

- Nhập biểu thức $x^3 + x^2 + 1 - y$, ta ấn:

ALPHA X ^ 3 + ALPHA X x^2 + 1 − ALPHA Y

- Khi đó, ta lần lượt với các bộ (-1; 3) ($-1-\sqrt{5}$; $3-2\sqrt{5}$):

CALC (−) 1 = 3 = 0

Tức là, điểm A thuộc (C).

CALC (−) 1 (−) √ 5 = 3 (−) 2 √ 5 = 0

Tức là, điểm B thuộc (C).

Bài 8. Gọi M, N là hai giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$. Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng:

A. $-\dfrac{5}{2}$. B. 1. C. 2. D. $\dfrac{5}{2}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{3x-1}{x-2} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x = 2 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_{M,N} = 2 \pm \sqrt{5} \Rightarrow x_I = \frac{1}{2}(x_M + x_N) = 2.$$

Vậy, hoành độ trung điểm I của đoạn thẳg MN bằng 2.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{3x-1}{x-2} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_M + x_N = 4 \Rightarrow x_I = \frac{1}{2}(x_M + x_N) = 2.$$

Vậy, hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng 2.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Vì đường thẳng $y = x + 1$ đi qua tâm đối xứng I(2; 3) của đường cong nên I là trung điểm của MN.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 9. Cho hàm số (C): $y = \frac{4x-6}{x-1}$. Tổng bình phương các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (C) với đường thẳng y = 6x + 5 bằng:

A. $\frac{5}{36}$. B. $\frac{7}{36}$. C. $\frac{11}{36}$. D. $\frac{13}{36}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{4x-6}{x-1} = 6x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 6x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3} \text{ và } x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{36}.$$

➢ ***Lời giải tự luận 1 kết hợp với máy tính*** CASIO fx – 570MS: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{4x-6}{x-1} = 6x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 6x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} \text{ và } x_2 = \frac{1}{3}, \text{ bằng cách ấn:}$$

MODE MODE MODE 1 ▶ 2

6 = (–) 5 = 1 = → 0.5

▼ → 0.3333

$a^{b/c}$ → 1⌟3

Khi đó $x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{13}{36}$, bằng cách ấn:

MODE 1

(1 $a^{b/c}$ 2) x^2 + (1 $a^{b/c}$ 3) x^2 = → 13⌟36

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{4x-6}{x-1} = 6x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 6x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5/6 \\ x_1 x_2 = 1/6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2.\frac{1}{6} = \frac{13}{36}.$$

➢ ***Lời giải tự luận 2 kết hợp với máy tính*** CASIO fx – 570MS: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{4x-6}{x-1} = 6x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 6x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5/6 \\ x_1 x_2 = 1/6 \end{cases}$$

Khi đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2.\frac{1}{6} = \frac{13}{36}$, bằng cách ấn:

MODE 1

(5 a b/c 6) x^2 − 2 × 1 a b/c 6 = 13⌋36

Bài 10. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Đồ thị hàm số cắt đường thẳng y = m tại 3 điểm phân biệt khi:

A. $-3 < m < 1$. B. $-3 \le m \le 1$. C. $m > 1$. D. $m < -3$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3 - 3x^2 + 1 = m \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0$. (1)

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1 - m$, ta có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	1 - m	↘	-3 - m	↗	$+\infty$

Từ đó, để đồ thị hàm số cắt đường thẳng y = m tại ba điểm phân biệt thì (1) có ba nghiệm phân biệt, tức là: $y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \Leftrightarrow (1 - m)(-3 - m) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

Vậy, với $-3 < m < 1$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$, ta có:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số cắt đường thẳng y = m tại ba điểm phân biệt khi $-3 < m < 1$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Để đường thẳng y = m cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì m phải nhận giá trị có dạng $y_{CT} < m < y_{CĐ}$ (dạng này chỉ có ở trong A).

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x^2 + 1 = m \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0. \qquad (*)$$

Khi đó:

▪ Với m = -1, phương trình (*) có dạng:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2-2x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Có ba giao điểm $\Rightarrow$ m = -1 thỏa mãn $\Rightarrow$ Các đáp án C và D bị loại.

▪ Với m = 1, phương trình (*) có dạng: $x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc x = 3

$\Rightarrow$ Có hai giao điểm $\Rightarrow$ m = 1 không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận 1,* chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm, ta được một phương trình bậc ba (f(x) = 0).

Bước 2: Để phương trình có ba nghiệm phân biệt, tức đồ thị hàm số y = f(x) cắt trục Ox tại ba điểm phâm biệt, điều kiện là đồ thị hàm số y = f(x) có CĐ, CT và $y_{CĐ}.y_{CT} < 0$.

▪ *Trong cách giải tự luận 2,* chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 2: Để đồ thị hàm số cắt đường thẳng y = m tại ba điểm phân biệt, điều kiện là $y_{CT} < m < y_{CĐ}$

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá,* chúng ta sử dụng nhận định ở bước 2 của lời giải tự luận 2.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* chúng ta lựa chọn các giá trị tương ứng của m để thực hiện các phép thử và qua mỗi phép thử chúng ta sẽ loại bỏ được các đáp án sai.

Các em học sinh nên kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx - 570MS để nhanh chóng tìm ra nghiệm của phương trình bậc ba.

Bài 11. Cho hàm số (C): $y = \frac{x-m}{x-2}$. Đồ thị hàm số cắt đường thẳng (d): y = mx - 1 tại hai điểm phân biệt khi:

A. Mọi m.
B. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
C. $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x-m}{x-2} = mx - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ g(x) = mx^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (C) tại hai điểm phân biệt khi:

Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta'_g > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 > 0 \\ 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}.$$

Vậy, với $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x-m}{x-2} = mx - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ g(x) = mx^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

- Với m = 0, phương trình (*) có dạng:

  $-2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$ (C) và (d) có một điểm chung

  $\Rightarrow m = 0$ không thoả mãn $\Rightarrow$ Các đáp án A và C bị loại.

- Với m = 2, phương trình (*) có dạng:

  $2x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$ (loại) $\Rightarrow$ (C) và (d) có một điểm chung

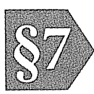
  $\Rightarrow m = 2$ không thoả mãn $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

☞ Chú ý: Để tăng độ khó cho bài toán, người ta có thể phát biểu dưới dạng:

Cho hàm số (C): $y = \frac{x-m}{x-2}$. Đường thẳng (d) đi qua điểm A(0; -1) có hệ góc m cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt khi:

A. Mọi m.
B. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
C. $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$.



CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM SỰ TIẾP XÚC CỦA HAI ĐỒ THỊ



KIẾN THỨC CƠ BẢN

Sử dụng mệnh đề:

Hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ *và* $y = g(x)$ *tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:* $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$

Khi đó, nghiệm của hệ phương trình chính là hoành độ tiếp điểm.



CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Tọa độ tiếp điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x + 4$, $y = g(x) = x + 8$ *là*:

A. (-1; 2). B. (-1; 7). C. (4; 12). D. (4; -4).

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = x + 8 \\ 3x^2 - 4x - 6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = 0 \\ 3x^2 - 4x - 7 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 7$, tức tọa độ tiếp điểm A(-1; 7).

Vậy, tọa độ tiếp điểm của hai đồ thị là điểm A(-1; 7).

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = x + 8 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 3x - 4) = 0$$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2(x - 4) = 0 \Rightarrow$ nghiệm kép $x = -1 \Rightarrow y = 7$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 2. Tọa độ tiếp điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^2 + 3x + 6$, $y = g(x) = x^3 - x^2 + 4$ là:

A. (2; 8). B. (2; 4). C. (-1; 2). D. (-1; 1).

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 + 4 = -x^2 + 3x + 6 \\ 3x^2 - 2x = -2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x - 2 = 0 \\ 3x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$, tức tọa độ tiếp điểm A(-1; 2).

Vậy, tọa độ tiếp điểm của hai đồ thị là điểm A(-1; 2).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^2 + 3x + 6 = x^3 - x^2 + 4 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2(x - 2) = 0 \Rightarrow$ nghiệm kép $x = -1 \Rightarrow y = 2$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 3. Tọa độ tiếp điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{6x}{x+2}$, $y = g(x) = x^2 + 3x$ là:

A. (0; 0). B. (0; 1). C. (5; 10). D. (-5 ; -10).

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6x}{x+2} = x^2 + 3x \\ \dfrac{12}{(x+2)^2} = 2x + 3 \end{cases} \overset{x \neq -2}{\Leftrightarrow} x = 0$$

$\Rightarrow y = 0$, tức tọa độ tiếp điểm O(0; 0).

Vậy, tọa độ tiếp điểm của hai đồ thị là điểm O(0; 0).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Phương trình hoành độ giao điểm:

$\dfrac{6x}{x+2} = x^2 + 3x \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 5) = 0$

$\Rightarrow$ nghiệm kép $x = 0 \Rightarrow y = 0$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 4. Cho hàm số (C): $y = x^3 + mx^2 - x - m$. Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành khi:

A. $m = \pm1$. B. $m = \pm2$. C. $m = \pm3$. D. $m = \pm4$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Đồ thị hàm số tiếp xúc với Ox khi sau có nghiệm:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + mx^2 - x - m = 0 & (1) \\ 3x^2 + 2mx - 1 = 0 & (2) \end{cases}.$$

Từ (1), ta biến đổi:

$x^2(x + m) - (x + m) = 0 \Leftrightarrow (x + m)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -m$ hoặc $x = \pm1$.

- Thay x = -m vào (2), ta được $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.
- Thay x = 1 vào (2), ta được $3 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.
- Thay x = -1 vào (2), ta được $1 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy, với $m = \pm 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 + mx^2 - x - m = 0 \Leftrightarrow (x + m)(x^2 - 1) = 0 \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -m \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

Từ đó, ta thấy ngay chỉ có với các giá trị của m ở A phương trình (*) có nghiệm kép nên việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp với máy tính* CASIO fx – 570MS: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 + mx^2 - x - m = 0. \qquad (**)$$

- Với m = 1 phương trình (**) có dạng:

$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$, có nghiệm kép x = -1, bằng cách ấn:

MODE MODE MODE 1 ▶ 3	
1 = 1 = (−) 1 = (−) 1 =	−1
▼	−1

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận,* chúng ta thiết lập điều kiện tiếp xúc cho hai đồ thị. Ở đây, các em học sinh cần lưu ý tới phương pháp giải một hệ phương trình đa thức bậc cao.
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* chúng ta sử dụng kết quả "*Hai đồ thị hàm số* y = f(x) *và* y = g(x) *tiếp xúc nhau khi phương trình* f(x) = g(x) *có nghiệm bội*" - Kết quả này không được trình bày trong SGK nên không được sử dụng trong lời giải tự luận. Và bằng việc phân tích được đa thức thành nhân tử, chúng ta nhanh chóng chỉ ra được đáp án đúng.
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp* sử dụng máy tính CASIO fx - 570MS chúng ta nhanh chóng tìm ra được nghiệm cho phương trình bậc ba.

Bài 5. Cho hàm số (C): $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Đồ thị hàm số tiếp xúc với Parabol (P): $y = 6x^2 - m$ khi:

A. m = -1 hoặc m = -2.
B. m = -2 hoặc m = -15.
C. m = -1 hoặc m = 15.
D. m = ±15.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Đồ thị (C) tiếp xúc với Parabol (P) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 + 1 = 6x^2 - m \\ 4x^3 - 4x = 12x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 8x^2 + 1 + m = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 15 \end{array}\right. .$$

Vậy, với m = -1 hoặc m = 15 thoả mãn điều kiện đầu bài.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Phương trình hoành độ giao điểm:

$x^4 - 2x^2 + 1 = 6x^2 - m \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + m + 1 = 0.$ (*)

- Với m = -1 phương trình (*) có dạng:

  $x^4 - 8x^2 = 0 \Rightarrow$ nghiệm kép $x = 0 \Rightarrow m = -1$ thoả mãn

  $\Rightarrow$ Các đáp án B và D bị loại.

- Với m = 15 phương trình (*) có dạng:

  $x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \Rightarrow$ nghiệm kép $x = \pm 2 \Rightarrow m = 15$ thoả mãn

  $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 6. Cho hàm số (C): $y = \dfrac{2x - 7}{x - 3}$. Đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng (d): $y = x + m$ khi:

A. m = -1 hoặc m = 3.
B. m = -1 hoặc m = -3
C. m = 1 hoặc m = 3.
D. m = 1 hoặc m = -3.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng (d) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-7}{x-3} = x + m \\ \dfrac{1}{(x-3)^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{2x-7}{x-3} - x \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 1 \end{array}\right. .$$

Vậy, với m = 1 hoặc m = -3 thoả mãn điều kiện đầu bài.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x-7}{x-3} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m - 5)x + 7 - 3m = 0. \quad (*)$$

▪ Với m = -1 phương trình (*) có dạng:

$x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow$ không có nghiệm kép $\Rightarrow m = -1$ không thoả mãn

$\Rightarrow$ Các đáp án A và B bị loại.

▪ Với m = -3 phương trình (*) có dạng:

$x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow$ nghiệm kép $x = 4 \Rightarrow m = -3$ thoả mãn

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x-7}{x-3} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m - 5)x + 7 - 3m = 0. \quad (**)$$

Phương trình (**) có nghiệm kép khi:

$$D = 0 \Leftrightarrow (m - 5)^2 + 4(3m - 7) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}\right. .$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 7. Cho hàm số (C): $y = \frac{ax^2 + 2ax + 1}{x + 2}$. Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành khi:

A. a = 1.

B. a = 1 hoặc a = 0.

C. a = ±1.

D. a = 1 hoặc a = 2.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Viết lại hàm số dưới dạng: $y = ax + \frac{1}{x+2}$.

Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục Ox khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} ax + \frac{1}{x+2} = 0 \\ a - \frac{1}{(x+2)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2} = 0 \\ a = \frac{1}{(x+2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ a = \frac{1}{(x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow a = 1.$$

Vậy, với a = 1 thoả mãn điều kiện đầu bài.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{ax^2 + 2ax + 1}{x + 2} = 0 \Rightarrow ax^2 + 2ax + 1 = 0. \quad (*)$$

▪ Với a = 0 phương trình (*) không thể có nghiệm kép, nên a = 0 không thoả mãn. Suy ra, đáp án B bị loại.

- Với a = -1 phương trình (*) có dạng:

  $x^2 + 2x - 1 = 0$, không có nghiệm kép $\Rightarrow$ a = -1 không thoả mãn

  $\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

- Với a = 2 phương trình (*) có dạng:

  $2x^2 + 4x + 1 = 0$, không có nghiệm kép $\Rightarrow$ a = 2 không thoả mãn

  $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận* chúng ta thiết lập điều kiện tiếp xúc cho hai đồ thị. Ở đây, các em học sinh cần lưu ý tới phương pháp giải hệ điều kiện.

- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* chúng ta không lựa chọn phép thử với a = 1 bởi nó có trong cả 4 lựa chọn nên chắc chắn sẽ là một nghiệm đúng.

Bài 8. Parabol (P): $y = 2x^2 + ax + b$ tiếp xúc với (H): $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ khi:

A. a = 6 và $b = -\frac{9}{2}$.

B. a = 6 và $b = \frac{9}{2}$.

C. a = -6 và $b = -\frac{9}{2}$.

D. a = -6 và $b = \frac{9}{2}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Để (P) tiếp xúc với (H) điều kiện là hệ sau có nghiệm $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} 2x^2 + ax + b = \dfrac{1}{x} \\ 4x + a = -\dfrac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + a.\dfrac{1}{2} + b \\ 4.\dfrac{1}{2} + a = -4 \end{cases} \Leftrightarrow a = -6 \text{ và } b = \frac{9}{2}.$$

Vậy, với a = -6 và $b = \frac{9}{2}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* - Học sinh tự thực hiện.



§8 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Với đồ thị hàm số y = f(x), ta có các kết quả:

- Nếu tiếp tuyến tại điểm $M(x_M; y_M)$ của đồ thị có hệ số góc bằng k thì: $y'(x_M) = k$.
- Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_M; y_M)$ của đồ thị có dạng:

  (d): $y = y'(x_M)(x - x_M) + y_M$.

Các dạng toán liên quan tới tiếp tuyến của đồ thị là:

Dạng 1: Tìm hoành độ (tung độ hoặc toạ độ) tiếp điểm của tiếp tuyến.

Dạng 2: Tìm hệ số góc của tiếp tuyến.

Dạng 3: Lập phương trình tiếp tuyến biết tiếp điểm.

Dạng 4: Lập phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc.

Dạng 5: Lập phương trình tiếp tuyến đi qua một điểm cho trước.

Dạng 6: Tìm điểm kẻ được k tiếp tuyến tới đồ thị.



II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Cho hàm số $y = x^2 - x + 1$ có đồ thị (P). Nếu tiếp tuyến tại điểm M của (P) có hệ số góc bằng 3 thì hoành độ của điểm M là:

A. 0. B. 2. C. 4. D. 6.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $y' = 2x - 1$.

Từ giả thiết $k_M = 3$, ta được: $y'(x_M) = 3 \Leftrightarrow 2x_M - 1 = 3 \Leftrightarrow x_M = 2$.

Vậy, hoành độ của điểm M bằng 2.

☞ Nhận xét: 1. Nếu yêu cầu được đổi thành "*Tìm tung độ của tiếp điểm*" thì chúng ta cùng thực hiện như trên rồi lấy giá trị của x_M thay vào hàm số để nhận được y_M.

2. Với yêu cầu "*Tìm toạ độ của tiếp điểm*" trong một vài trường hợp đặc thù của các lựa chọn trắc nghiệm, chúng ta còn có thể sử dụng các phép thử.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^2 + 2x + 3$ có đồ thị (P). Nếu tiếp tuyến tại điểm M của (P) có hệ số góc bằng -4 thì toạ độ của điểm M là:

A. M(1; 3). **B.** M(0; 3). **C.** M(-1; 2). **D.** M(-3; 4).

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $y' = 2x + 2$.

Từ giả thiết $k_M = -4$, ta được: $y'(x_M) = -4 \Leftrightarrow 2x_M + 2 = -4 \Leftrightarrow x_M = -3 \Rightarrow y_M = 4$.

Vậy, điểm M(-3; 4).

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì $M(1; 3) \notin (P)$ nên đáp án A bị loại.

▪ Vì M(0; 1) thuộc nhánh bên phải của (P) nên đường thẳng (d) qua M với hệ số góc $k = -4 < 0$ sẽ không thể là tiếp tuyến của (P). Do đó, đáp án B bị loại.

▪ Vì M(-1; 2) là đỉnh của (P) nên tiếp tuyến tại M có $k = 0$. Tức là, đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, với Parabol (P) thì luôn tìm được một điểm M thuộc (P) sao cho hệ số góc của tiếp tuyến của (P) tại M bằng k cho cho trước. Điều này gợi ý cho dạng toán "*Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc bằng k*".

Bài 3. Cho hàm số (P): $y = x^2 - 4x + 3$. Tiếp tuyến của (P) có hệ số góc bằng 2 có phương trình:

A. $y = x + 6$. **B.** $y = 2x + 6$. **C.** $y = 2x - 6$. **D.** $y = x - 6$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $y' = 2x - 4$.

Giả sử $M(x_M; y_M)$ là tiếp điểm, khi đó:

$$y'(x_M) = 2 \Leftrightarrow 2x_M - 4 = 2 \Leftrightarrow x_M = 3 \Rightarrow y_M = 0.$$

Từ đó, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

$$(d): y = 2(x - 3) \Leftrightarrow (d): y = 2x - 6.$$

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì hệ số góc tiếp tuyến bằng 2 nên các đáp án A và D bị loại.

▪ Với đường thẳng trong B, xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^2 - 4x + 3 = 2x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 3 = 0$, không có nghiệm kép

$\Rightarrow$ y = 2x + 6 không phải là tiếp tuyến $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Chú ý: Để tăng độ khó cho bài toán người ta thường phát biểu dưới dạng "*Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song hoặc vuông góc hoặc có hệ số góc thỏa mãn điều kiện* K *nào đó* (thí dụ hợp với chiều dương trục Ox một góc 45^0)".

Bài 4. Cho hàm số (C): $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$. Nếu tiếp tuyến tại điểm M của (C) có hệ số góc bằng -9 thì toạ độ của điểm M là:

A. M(1; -9) hoặc M(2; -20).
B. M(1; -9) hoặc M(3; -25).
C. M(0; 2) hoặc M(2; -20).
D. M(0; 2) hoặc M(-1; 7).

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

Từ giả thiết $k_M = -9$, ta được:

$$y'(x_M) = -9 \Leftrightarrow 3x_M^2 - 6x_M - 9 = -9 \Leftrightarrow x_M^2 - 2x_M = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = 0 \\ x_M = 2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ M(0; 2) hoặc M(2; -20).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì M(1; -9) ∈ (C) nên hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng:

k = y'(1) = -12 bằng cách ấn:

MODE 1

SHIFT d/dx ALPHA X ^ 3 – 3 ALPHA X x^2 – 9 ALPHA X + 2 , 2) = → –12

$\Rightarrow$ Các đáp án A và B bị loại.

▪ Vì M(-1; 7) ∈ (C) nên hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng:

k = y'(-1) = 0 bằng cách thay 2 ở đổi dòng lệnh trên bằng -1:

SHIFT d/dx ALPHA X ^ 3 – 3 ALPHA X x^2 – 9 ALPHA X + 2 , (–) 1) = → 0

$\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, với hàm đa thức bậc ba (C) thì phương trình hoành độ tiếp điểm khi biết hệ số góc k là một phương trình bậc hai (kí hiệu là (*)), do vậy sẽ có ba trường hợp xảy ra:

▪ Nếu (*) vô nghiệm thì không có tiếp điểm, khi đó bài toán thường được phát biểu dưới dạng:

Cho hàm số (C): $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. Nếu tiếp tuyến tại điểm M của (C) có hệ số góc bằng -2 thì toạ độ của điểm M là:

A. (0; 1). B. $\left(1; -\frac{1}{6}\right)$.

C. (6; 49). D. Cả A, B, C đều sai.

▪ Nếu (*) có một nghiệm thì có một tiếp điểm, khi đó bài toán thường được phát biểu như trên (tìm tọa độ tiếp điểm) hoặc dưới dạng:

Cho hàm số (C): $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + 1$. Tiếp tuyến của (C) có hệ số góc bằng 1 (hoặc song song với đường thẳng y = x + 1 hoặc vuông góc với đường thẳng x + y + 2 = 0) có phương trình:

A. 3x - 3y + 4 = 0. B. 2x - 2y + 3 = 0.

C. x - y + 2 = 0. D. x - y + 1 = 0.

▪ Nếu (*) có hai nghiệm phân biệt thì có hai tiếp điểm, khi đó bài toán thường được phát biểu dưới các dạng:

Dạng 1: Tìm tọa độ các tiếp điểm.

Dạng 2: Giả sử các tiếp điểm là A, B tìm tọa độ (cũng có thể chỉ là hoành độ hoặc tung độ) trung điểm của đoạn AB. Với dạng toán này các em học sinh có thể thêm một phép thử xuất phát từ tính chất của hàm đa thức bậc ba là "*Đồ thị hàm đa thức bậc ba nhận điểm uốn* U *làm tâm đối xứng*" suy ra U là trung điểm của AB.

Dạng 3: Giả sử các tiếp điểm là A, B, lập phương trình đường thẳng AB.

Bài 5. Cho hàm số (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Hai tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng y = 9x - 7 tiếp xúc với (C) tại A, B. Phương trình đường thẳng (AB) có dạng:

A. x + y + 3 = 0. B. x + y - 5 = 0. C. x - y - 1 = 0. D. x - y + 1 = 0.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

Giả sử M(x; y) là tiếp điểm, khi đó:

$$y'(x) = 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = -1 \\ x_B = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} A(-1; -2) \\ B(3; 2) \end{cases}$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(-1; -2) \\ \text{qua } B(3; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x+1}{3+1} = \frac{y+2}{2+2} \Leftrightarrow (AB): x - y - 1 = 0.$$

➢ ***Lời giải tự luận kết hợp phép thử:*** Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

Giả sử M(x; y) là tiếp điểm, khi đó:

$$y'(x) = 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = -1 \\ x_B = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} A(-1; -2) \\ B(3; 2) \end{cases}$$

Và tọa độ hai điểm A, B thỏa mãn phương trình trong C.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Nhận xét rằng đường thẳng (AB) sẽ phải đi qua điểm uốn U của đồ thị hàm số.

Ta lần lượt có: $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$,

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Điểm uốn } U(1; 0)$$

Và tọa độ U chỉ thỏa mãn phương trình trong C.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 6. Cho hàm số (C): $y = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x - 4y + 4 = 0$ có phương trình:

A. $4x + y - 11 = 0$.

B. $4x + y - 9 = 0$.

C. $4x + y - 6 = 0$.

D. Cả A, B, C đều sai.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 8$.

Giả sử M(x ; y) là tiếp điểm, khi đó:

$$y'(x) = -4 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 8 = -4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow M(2; 1).$$

Từ đó, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

$$(d): y = -4(x - 2) + 1 \Leftrightarrow (d): 4x + y - 9 = 0.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với đường thẳng trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

$$x^3 - 6x^2 + 8x + 1 = 11 - 4x \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 10 = 0$$

Phương trình không có nghiệm bội, bằng cách ấn:

MODE MODE MODE 1 ▶ 3

1 = (-) 6 = 12 = (-) 10 = | 3.2599

▼ | R↔I

$\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với đường thẳng trong đáp án B, ta có phương trình hoành độ:

$x^3 - 6x^2 + 8x + 1 = 9 - 4x \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ là nghiệm bội $\Rightarrow y = 9 - 4x$ tiếp xúc với (C).

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 7. Cho hàm số (C): $y = x^4 - 14x^2 + 13$. Nếu tiếp tuyến tại điểm M của (C) có hệ số góc bằng 24 thì toạ độ của điểm M là:

A. M(-3; -32), M(1; 0) hoặc M(2; -27).

B. M(3; -32), M(-1; 0) hoặc M(2; -27).

C. M(3; -32), M(-1; 0) hoặc M(-2; -27).

D. M(-3; -32), M(1; 0) hoặc M(-2; 27).

Đáp số **trắc nghiệm C.**

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có $y' = 4x^3 - 28x$.

Từ giả thiết $k_M = 24$, ta được:

$$y'(x_M) = 24 \Leftrightarrow 4x_M^3 - 28x_M = 24 \Leftrightarrow x_M^3 - 7x_M - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_M - 3)(x_M^2 + 3x_M + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M - 3 = 0 \\ x_M^2 + 3x_M + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = 3 \\ x_M = -1 \\ x_M = -2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ M(3; -32), M(-1; 0) hoặc M(-2; -27).

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta có:

$y' = 4x^3 - 28x$.

Từ giả thiết $k_M = 24$, ta được:

$$y'(x_M) = 24 \Leftrightarrow 4x_M^3 - 28x_M = 24 \Leftrightarrow x_M^3 - 7x_M - 6 = 0$$

$\Leftrightarrow x_M = 3$, $x_M = -2$ hoặc $x_M = -1$ bằng cách ấn:

MODE MODE MODE 1 ▶ 3

1 = 0 = (-) 7 = (-) 6 =   3

▼   –2

▼   –1

Khi đó, chúng ta có tọa độ các tiếp điểm là M(3; -32), M(-1; 0) hoặc M(-2; -27) bằng cách ấn:

ALPHA X ^ 4 – 14 ALPHA X x^2 + 13

CALC 3 = → –32

CALC (–) 1 = → 0

CALC (–) 2 = → –27

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì M(1; 0) ∈ (C) nên hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng: k = y'(1) = -12 bằng cách ấn:

MODE 1

SHIFT d/dx ALPHA X ^ 4 – 14 ALPHA X x^2 + 13 , 1) = → –24.0000

⇒ Các đáp án A và D bị loại.

▪ Vì M(2; -27) ∈ (C) nên hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng:

k = y'(2) = 0 bằng cách thay 1 ở đổi dòng lệnh trên bằng 2:

SHIFT d/dx ALPHA X ^ 4 – 14 ALPHA X x^2 + 13 , 2) = → –24.0000

⇒ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 8. Cho hàm số (C): $y = x^4 - 24x^2 + 25$. Nếu tiếp tuyến tại điểm M của (C) song song với đường thẳng $64x + y + 4 = 0$ thì toạ độ của điểm M là:

A. M(2; -55) hoặc M(-4; -103).
B. M(2; -55) hoặc M(4; -103).
C. M(-2; -55) hoặc M(-4; -103).
D. M(-2; -55) hoặc M(4; -103).

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có $y' = 4x^3 - 48x$.

Giả sử M(x; y) là tiếp điểm, khi đó:

$y'(x) = -64 \Leftrightarrow 4x^3 - 48x = -64 \Leftrightarrow x^3 - 12x + 16 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x - 8) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -4$

$\Rightarrow$ M(2; -55) hoặc M(-4; -103).

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta có:

$y' = 4x^3 - 48x$.

Từ giả thiết $k_M = -64$, ta được: $y'(x) = -64 \Leftrightarrow 4x^3 - 48x = -64 \Leftrightarrow x^3 - 12x + 16 = 0$

$\Leftrightarrow x = -4$ hoặc $x = 2$ bằng cách ấn:

MODE MODE MODE 1 ▶ 3

1 = 0 = (–) 12 = 16 = → –4

▼ → 2

Khi đó, chúng ta có tọa độ các tiếp điểm là M(-4; -103) hoặc M(2; -55) bằng cách ấn:

ALPHA X ^ 4 – 24 ALPHA X x^2 + 25

CALC (–) 4 = → –103

CALC 2 = → –55

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì M(2; -55) ∈ (C) nên hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng: k = y'(1) = -12 bằng cách ấn:

MODE 1

SHIFT d/dx ALPHA X ^ 4 – 24 ALPHA X x^2 + 25 , 2)

= → –64.0000

⇒ Các đáp án C và D bị loại.

▪ Vì M(-4; -103) ∈ (C) nên hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng: k = y'(2) = 0 bằng cách thay 1 ở đổi dòng lệnh trên bằng 2:

SHIFT d/dx ALPHA X ^ 4 – 14 ALPHA X x^2 + 13 , (–) 4)

= → –64

⇒ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 9. Cho hàm số (C): $y = x^4 - 4x^2 + 5$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $16x - y + 1 = 0$ có phương trình:

A. $16x - y - 14 = 0$. B. $16x - y - 27 = 0$.

C. $16x - y + 18 = 0$. D. Cả A, B, C.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có $y' = 4x^3 - 8x$.

Giả sử $M(x; y)$ là tiếp điểm, khi đó: $y'(x) = 16 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 16 \Leftrightarrow x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow M(2; 5)$.

Từ đó, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

(d): $y = 16(x - 2) + 5 \Leftrightarrow$ (d): $16x - y - 27 = 0$.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta có:

$y' = 4x^3 - 8x$.

Từ giả thiết $k_M = 16$, ta được: $y'(x) = 16 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 16 \Leftrightarrow x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ bằng cách ấn:

MODE MODE MODE 1 ▶ 3
1 = 0 = (–) 2 = (–) 4 = ▼

2
R↔I

Khi đó, chúng ta có tọa độ các tiếp điểm là M(2; 5), suy ra phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

(d): $y = 16(x - 2) + 5 \Leftrightarrow$ (d): $16x - y - 27 = 0$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với đường thẳng trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

$x^4 - 4x^2 + 5 = 16x - 14 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 16x + 19 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + x^2 - 3x - 19) = 0$

Phương trình không có nghiệm bội, bằng cách ấn:

MODE MODE MODE 1 ▶ 3
1 = 1 = (–) 3 = (–) 19 = ▼

2.7052
R↔I

$\Rightarrow$ Các đáp án A và D bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án B, ta có phương trình hoành độ:

$x^4 - 4x^2 + 5 = 16x - 27 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 16x + 32 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^3 + 2x^2 - 16) = 0$

Phương trình có nghiệm bội x = 2, bằng cách ấn:

1 = 2 = 0 = (–) 16 = ▼

2
R↔I

$\Rightarrow$ y = 16x - 27 tiếp xúc với (C).

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 10. Cho hàm số (H): $y = \frac{x-3}{x-2}$. Hai tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng x - 4y + 1 = 0 tiếp xúc với (H) tại A, B. Tọa độ trung điểm I của AB là:

A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. **B.** (1; 2). **C.** (2; 1). **D.** $\left(4; \frac{1}{2}\right)$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $y' = \frac{1}{(x-2)^2}$.

Giả sử M(x; y) là tiếp điểm, khi đó:

$$y'(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow x_A = 0 \text{ và } x_B = 4$$

$$\Rightarrow A\left(0; \frac{3}{2}\right) \text{ và } B\left(4; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \text{Trung điểm } I(2; 1).$$

Vậy, trung điểm đoạn AB là I(2; 1).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Nhận xét rằng hai điểm A, B đối xứng qua tâm I của đồ thị hàm số, nên I(2; 1) là trung điểm của AB.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 11. Cho hàm số (H): $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Hai tiếp tuyến của (H) vuông góc với đường thẳng y = 3x + 2 tiếp xúc với (H) tại A, B. Phương trình đường thẳng (AB) có dạng:

A. x - 2y + 3 = 0. **B.** x - 3y + 5 = 0.

C. x + 3y + 5 = 0. **D.** x + 2y + 3 = 0.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$.

Giả sử M(x; y) là tiếp điểm, khi đó:

$$y'(x) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{-3}{(x-1)^2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = -2 \\ x_B = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} A(-2; 1) \\ B(4; 3) \end{cases}$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(-2; 1) \\ \text{qua } B(4; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x+2}{4+2} = \frac{y-1}{3-1} \Leftrightarrow (AB): x - 3y + 5 = 0.$$

➢ *Lời giải tự luận kết hợp phép thử:* Ta có:

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

Giả sử M(x; y) là tiếp điểm, khi đó:

$$y'(x) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{-3}{(x-1)^2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = -2 \\ x_B = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} A(-2; 1) \\ B(4; 3) \end{cases}$$

Và tọa độ hai điểm A, B thỏa mãn phương trình trong B.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 12. Cho hàm số (P): $y = \frac{x^2 - x - 5}{x+2}$. Nếu tiếp tuyến tại điểm M của (H) song song với đường thẳng 3x - 4y + 1 = 0 thì toạ độ của điểm M là:

A. $M\left(1; -\frac{5}{3}\right)$ hoặc $M\left(-5; -\frac{25}{3}\right)$.

B. M(1; -4) hoặc M(-5; -6).

C. $M\left(0; -\frac{5}{2}\right)$ hoặc $M\left(-4; -\frac{15}{2}\right)$.

D. M(0; -6) hoặc M(-4; -4).

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = x - 3 + \frac{1}{x+2} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2}$$

Giả sử M(x; y) là tiếp điểm, khi đó:

$$y'(x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -4$$

$$\Rightarrow M\left(0; -\frac{5}{2}\right) \text{ hoặc } M\left(-4; -\frac{15}{2}\right)$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì $M\left(1; -\frac{5}{3}\right) \in$ (H) nên đáp án B bị loại và hệ số góc của tiếp tuyến tại M bằng: $k = y'(1) = \frac{8}{9}$ bằng cách ấn:

MODE 1

SHIFT d/dx (ALPHA X x^2 – ALPHA X – 5) ÷ (ALPHA X + 2) , 2) = 0.8888

⇒ Đáp án A bị loại.

▪ Vì $M\left(0; -\frac{5}{2}\right) \in (H)$ nên đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 13. Cho hàm số (P): $y = x^2 - 4x + 3$. Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = 1$, có hệ số góc bằng:

A. -2. B. $-\frac{11}{2}$. C. $\frac{11}{2}$. D. 2.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$y' = 2x - 4 \Rightarrow$ Hệ số góc $k = y'(1) = 2 - 4 = -2$.

Vậy, hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $x = 1$ bằng -2.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

▪ Thiết lập môi trường:

[MODE] [1]

▪ Ta ấn:

[SHIFT] [d/dx] [ALPHA] [X] [x^2] [–] 4 [ALPHA] [X] [+] 3 [,] 1 [)] [=] [–2]

Vậy, ta được hệ số góc $k = y'(1) = -2$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Chú ý: Để tăng độ khó cho bài toán, người ta có thể phát biểu dưới dạng "Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm".

Bài 14. Cho hàm số (C): $y = x^3 - 6x^2 + 7x + 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = 2$ có dạng:

A. $x + y - 1 = 0$. B. $5x + y - 9 = 0$.

C. $5x + y + 9 = 0$. D. $x + y + 1 = 0$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 7$.

Từ đó, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

(d): $y = y'_{(2)}(x - 2) + y(2) \Leftrightarrow$ (d): $y = -5(x - 2) - 1 \Leftrightarrow$ (d): $5x + y - 9 = 0$.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:*

Ta có phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

$$(d): y = y'_{(2)}(x - 2) + y(2) \Leftrightarrow (d): y = -5(x - 2) - 1 \Leftrightarrow (d): 5x + y - 9 = 0.$$

trong đó y'(2) và y(2) được xác định bằng cách ấn:

SHIFT d/dx ALPHA X ^ 3 – 6 ALPHA X x^2 + 7 ALPHA X + 1 , 2) = → –5.0000

tiếp theo dùng con trỏ để sửa dòng lệnh trên thành:

ALPHA X ^ 3 – 6 ALPHA X x^2 + 7 ALPHA X + 1 CALC 2 = → –1

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt:

▪ Với đường thẳng trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0$$

Phương trình không có nghiệm bội x = 2, nên đáp án A bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án B, ta có phương trình hoành độ:

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 1 = 9 - 5x \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \Leftrightarrow (x - 2)^3 = 0.$$

Phương trình có nghiệm bội x = 2, bằng cách ấn:

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS:

Ta lần lượt:

▪ Tiếp tuyến của (C) tại điểm có x = 2 có hệ số góc k = y'(2) = -5 bằng cách ấn:

SHIFT d/dx ALPHA X ^ 3 – 6 ALPHA X x^2 + 7 ALPHA X + 1 , 2) = → –5.0000

Suy ra, các đáp án A và D bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án B, ta có phương trình hoành độ:

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 1 = 9 - 5x \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \Leftrightarrow (x - 2)^3 = 0.$$

Phương trình có nghiệm bội x = 2, bằng cách ấn như ở trên.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Điểm có hoành độ x = 2 thuộc (C) là điểm M(2; -1). Và chỉ có các đường thẳng ở các đáp án A và B đi qua M, nên các đáp án C và D bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

$$x^3 - 6x^2 + 7x + 1 = 1 - x \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0$$

Phương trình không có nghiệm bội x = 2, nên đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 15. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị hàm số, có phương trình là:

A. $y = -x + \frac{11}{3}$. B. $y = -x - \frac{1}{3}$. C. $y = x - \frac{1}{3}$. D. $y = x + \frac{11}{3}$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta lần lượt có: $y' = x^2 - 4x + 3$, $y'' = 2x - 4$,

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_U = 2 \Rightarrow \text{Điểm uốn } U(2; \frac{5}{3}).$$

Khi đó, phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn có dạng:

$$y = y'_{(2)}(x - 2) + \frac{5}{3} \Leftrightarrow y = -x + \frac{11}{3}.$$

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận***: Ta lần lượt:

▪ Hàm đa thức bậc ba có a > 0 thì tiếp tuyến tại U có hướng đi xuống (hệ số góc k < 0). Suy ra, các đáp án C và D bị loại.

▪ Hàm số có: $y' = x^2 - 4x + 3$, $y'' = 2x - 4$, $y'' = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_U = 2$

$\Rightarrow$ Điểm uốn $U(2; \frac{5}{3})$ thuộc đường thẳng trong A.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

▪ Hàm đa thức bậc ba có a > 0 thì tiếp tuyến tại U có hướng đi xuống (hệ số góc k < 0). Suy ra, các đáp án C và D bị loại.

▪ Xét hệ: $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = -x + \frac{11}{3} \\ x^2 - 4x + 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - \frac{8}{3} = 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 16. Cho hàm số (C): $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Cho điểm A (x_0, y_0) thuộc (C), tiếp tuyến với (C) tại A cắt (C) tại điểm B khác A. Hoành độ điểm B tính theo x_0 là:

A. $x_B = 1 - 2x_0$. B. $x_B = 2 - 2x_0$. C. $x_B = 3 - 2x_0$. D. $x_B = 4 - 2x_0$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Xét hàm số, ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

Phương trình (d) tiếp tuyến của (C) tại A có dạng:

$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$

$\Leftrightarrow (d): y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 1$.

Hoành độ giao điểm của tiếp tuyến với (C) là nghiệm phương trình:

$x^3 - 3x^2 + 1 = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 1$

$\Leftrightarrow (x - x_0)^2(x - 3 + 2x_0) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ x = 3 - 2x_0 \end{array}\right.$

Vậy, hoành độ điểm B là $x_B = 3 - 2x_0$.

Bài 17. Cho hàm số (C): $y = x^3 - x^2 - x + 1$. Các tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành có phương trình là:

A. $(d_1): y = 0$ và $(d_2): y = 4(x + 1)$.

B. $(d_1): y = 0$ và $(d_2): y = 2(x + 1)$.

C. $(d_1): y = 1$ và $(d_2): y = 3(x + 1)$.

D. $(d_1): y = x - 2$ và $(d_2): y = x + 1$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Hoành độ giao điểm của (C) với Ox là nghiệm của phương trình:

$x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

- Tại điểm có hoành độ $x_1 = 1$, ta được tiếp tuyến (d_1) có phương trình:

  $(d_1): y = y'_{(1)}(x - 1) + y(1) \Leftrightarrow (d_1): y = 0$.

- Tại điểm có hoành độ $x_2 = -1$, ta được tiếp tuyến (d_2) có phương trình:

  $(d_2): y = y'_{(-1)}(x + 1) + y(-1) \Leftrightarrow (d_2): y = 4(x + 1)$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận*: Ta lần lượt:

- Phương trình hoành độ giao điểm:

  $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$ Nghiệm kép x = 1

  $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số nhận Ox làm tiếp tuyến

  $\Rightarrow$ Các đáp án C và D bị loại.

- Xét hệ:

  $\begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 = 4(x + 1) \\ 3x^2 - 2x - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \\ 3x^2 - 2x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt:

▪ Với lựa chọn D, vì (d_1): y = x - 2 không có điểm chung với (C) trên Ox, nên đáp án D bị loại.

▪ Với lựa chọn C, vì (d_1): y = 1 không có điểm chung với Ox, nên đáp án C bị loại.

▪ Xét hệ:

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 = 2(x+1) \\ 3x^2 - 2x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0 \\ 3x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}, \text{ vô nghiệm}$$

$\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt:

▪ Vì (d_1): y = 0 có điểm chung với (C) trên Ox, nên xét hệ:

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Các đáp án C và D bị loại.}$$

▪ Vì (d_2): y = 4(x + 1) có điểm chung với (C) trên Ox, nên xét hệ:

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 = 4(x+1) \\ 3x^2 - 2x - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \\ 3x^2 - 2x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 18. Cho hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$. Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ x = 1, có hệ số góc bằng:

A. -6. B. $-\frac{2}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 6.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$y' = 4x^3 + 2x \Rightarrow$ Hệ số góc $k = y'(1) = 4.1^3 + 2.1 = 6$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

▪ Thiết lập môi trường: [MODE] [1]

▪ Ta ấn:

[SHIFT] [d/dx] [ALPHA] [X] [^] 4 [+] [ALPHA] [X] [x^2] [+] 1 [,] 1 [)]

[=] [6]

Vậy, ta được hệ số góc k = y'(1) = 6.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt:

- Vì f'(1) không thể là số âm nên chúng ta loại trừ ngay được các đáp án A và B.
- Vì f'(1) phải là số nguyên nên chúng ta loại trừ ngay được đáp án C.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 19. Cho hàm số (H): $y = \frac{3x+1}{x-3}$. Phương trình tiếp tuyến (d) của đồ thị tại điểm có hoành độ x = 2 có dạng:

A. (d): 10x + y - 1 = 0.
B. (d): 5x + 2y - 13 = 0.
C. (d): 10x + y - 13 = 0.
D. (d): 5x + 2y + 1 = 0.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có: $y' = \frac{-10}{(x-3)^2}$.

Từ đó, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

$$(d): y = y'_{(2)}(x - 2) + y(2) \Leftrightarrow (d): y = -10(x - 2) - 7 \Leftrightarrow (d): 10x + y - 13 = 0.$$

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Ta có phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

$$(d): y = y'_{(2)}(x - 2) + y(2) \Leftrightarrow (d): y = -10(x - 2) - 7 \Leftrightarrow (d): 10x + y - 13 = 0.$$

trong đó y'(2) và y(2) được xác định bằng cách ấn:

MODE 1
SHIFT d/dx (3 ALPHA X + 1) ÷ (ALPHA X − 3) , 2) = −9.9999

tiếp theo dùng con trỏ để sửa dòng lệnh trên thành:

(3 ALPHA X + 1) ÷ (ALPHA X − 3)
CALC 2 = −7

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt:

- Với đường thẳng trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{3x+1}{x-3} = 1 - 10x \Leftrightarrow 10x^2 - 28x + 4 = 0.$$

Phương trình không có nghiệm bội, nên đáp án A bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án B, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{3x+1}{x-3} = \frac{13}{2} - \frac{5x}{2} \Leftrightarrow 5x^2 - 26x + 41 = 0$$

Phương trình không có nghiệm bội, nên đáp án B bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án C, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{3x+1}{x-3} = 13 - 10x \Leftrightarrow 10x^2 - 40x + 40 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0.$$

Phương trình có nghiệm bội x = 2. Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với đường thẳng trong đáp án D, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{3x+1}{x-3} = \frac{1}{2} - \frac{5x}{2} \Leftrightarrow 5x^2 - 10x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

Phương trình không có nghiệm bội x = 2, nên đáp án D bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án C, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{3x+1}{x-3} = 13 - 10x \Leftrightarrow 10x^2 - 40x + 40 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0.$$

Phương trình có nghiệm bội x = 2. Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta lần lượt:

▪ Tiếp tuyến của (C) tại điểm có x = 2 có hệ số góc k = y'(2) = -10 bằng cách ấn:

MODE 1

SHIFT d/dx (3 ALPHA X + 1) ÷ (ALPHA X − 3) , 2) = −9.9999

Suy ra, các đáp án B và D bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{3x+1}{x-3} = 1 - 10x \Leftrightarrow 10x^2 - 28x + 4 = 0.$$

Phương trình không có nghiệm bội, nên đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Điểm có hoành độ x = 2 thuộc (H) là điểm M(2; -7). Và chỉ có đường thẳng ở đáp án C đi qua M, nên các đáp án A, B và D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 20. Cho hàm số (C): $y = \frac{x+1}{2x-1}$. Tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng y = 1 có phương trình là:

A. (d): x + y - 5 = 0.
B. (d): x + 3y - 5 = 0.
C. (d): 3x + y - 5 = 0.
D. (d): x + y - 3 = 0.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x+1}{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow M(2; 1).$$

Ta có: $y' = \frac{-3}{(2x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = -\frac{1}{3}$.

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M(2; 1) có dạng:

$$(d): y = y'_{(2)}(x - 2) + 1 \Leftrightarrow (d): y = -\frac{1}{3}(x - 2) + 1 \Leftrightarrow (d): x + 3y - 5 = 0.$$

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x+1}{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow M(2; 1).$$

Ta có phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

$$(d): y = y'_{(2)}(x - 2) + 1 \Leftrightarrow (d): y = -\frac{1}{3}(x - 2) + 1 \Leftrightarrow (d): x + 3y - 5 = 0.$$

trong đó y'(2) được xác định bằng cách ấn:

MODE 1

SHIFT d/dx (ALPHA X + 1) ÷ (2 ALPHA X – 1) , 2) = −0.3333

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt:

▫ Với đường thẳng trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x+1}{2x-1} = 5 - x \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 6 = 0.$$

Phương trình không có nghiệm bội, nên đáp án A bị loại.

▫ Với đường thẳng trong đáp án B, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x+1}{2x-1} = \frac{5}{3} - \frac{x}{3} \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow \text{Nghiệm bội } x = 2$$

$\Rightarrow y(2) = \frac{2+1}{2.2-1} = 1$, thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt:

▪ Với đường thẳng trong đáp án D, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x+1}{2x-1} = 3 - x \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0.$$

Phương trình không có nghiệm bội, nên đáp án D bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án C, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x+1}{2x-1} = 5 - 3x \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow \text{Nghiệm bội } x = 1$$

$\Rightarrow y(1) = \frac{1+1}{2-1} = 2$, không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án B, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x+1}{2x-1} = \frac{5}{3} - \frac{x}{3} \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow \text{Nghiệm bội } x = 2$$

$\Rightarrow y(2) = \frac{2+1}{2.2-1} = 1$, thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x+1}{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow M(2; 1).$$

Ta lần lượt đánh giá:

▪ Chỉ có các đường thẳng ở các đáp án B và D đi qua M, nên các đáp án A và C bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án D, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x+1}{2x-1} = 3 - x \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 4 = 0.$$

Phương trình không có nghiệm bội, nên đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x+1}{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow M(2; 1).$$

Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến $k = y'(2) = -\frac{1}{3}$ được xác định bằng cách ấn:

MODE 1

SHIFT d/dx (ALPHA X + 1) ÷ (2 ALPHA X − 1) , 2) = −0.3333

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 21. Cho hàm số (C): $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$. Tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có phương trình là:

A. y = -x + 2. B. y = 3x + 2. C. y = -x + 1. D. y = 3x + 1.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Toạ độ giao điểm của (C) với Oy là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow M(0; 1).$$

Ta có: $y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} \Rightarrow y'(0) = -1.$

Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M(0; 1) có dạng:

$$(d): y = y'_{(0)}(x - 0) + 1 \Leftrightarrow (d): y = -x + 1.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt:

- Vì $(C) \cap Oy = M(0; 1)$ nên các đáp án A và B bị loại do không đi qua M.
- Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS ta tính y'(0) bằng cách ấn:

MODE 1

SHIFT d/dx (ALPHA X x^2 + 2 ALPHA X − 1) ÷ (ALPHA X − 1) , 0) = −0.9999

Tức là $y'(0) \approx -1$, suy ra đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt:

- Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS ta tính y'(0) bằng cách ấn:

MODE 1

SHIFT d/dx (ALPHA X x^2 + 2 ALPHA X − 1) ÷ (ALPHA X − 1) , 0) = −0.9999

Tức là $y'(0) \approx -1$, suy ra các đáp án B và D bị loại.

▪ Với kết quả trong A thì $(d) \cap Oy = M(0; 2) \notin (C)$ nên đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 3:* Ta lần lượt:

▪ Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS ta tính $y'(0)$ bằng cách ấn:

MODE 1

SHIFT d/dx (ALPHA X x^2 + 2 ALPHA X – 1) ÷ (ALPHA X – 1) , 0) = –0.9999

Tức là $y'(0) \approx -1$, suy ra các đáp án B và D bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x^2+2x-1}{x-1} = 2 - x \Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 4:* Ta lần lượt:

▪ Với đường thẳng trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x^2+2x-1}{x-1} = 2 - x \Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = 0.$$

Phương trình không có nghiệm bội, nên đáp án A bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án B, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x^2+2x-1}{x-1} = 3x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Phương trình không có nghiệm bội, nên đáp án B bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án C, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x^2+2x-1}{x-1} = 1 - x \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow \text{Nghiệm bội } x = 0\text{, thỏa mãn.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 5:* Ta lần lượt:

▪ Với đường thẳng trong đáp án D, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x^2+2x-1}{x-1} = 3x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0.$$

Phương trình không có nghiệm bội, nên đáp án D bị loại.

- Với đường thẳng trong đáp án C, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x^2+2x-1}{x-1} = 1 - x \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow \text{Nghiệm bội } x = 0\text{, thỏa mãn.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 22. Cho hàm số (C): $y = \frac{x^3-x^2-x+2}{x-1}$. Tiếp tuyến (d) của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ x = 2 sẽ:

A. Song song với đường thẳng y = x - 1.

B. Vuông góc với đường thẳng y = x - 1.

C. Song song với đường thẳng y = 3x + 5.

D. Vuông góc với đường thẳng y = 3x + 5.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = x^2 - 1 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow y' = 2x - \frac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow \text{Hệ số góc } k = y'(2) = 3.$$

Vậy, tiếp tuyến (d) song song với đường thẳng y = 3x + 5.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Để tính y'(2) ta thực hiện:

MODE 1

SHIFT d/dx (ALPHA X ^ 3 − ALPHA X x^2 − ALPHA X + 2) ÷ (ALPHA X − 1) , 2) = 3.0000

Vậy, ta được hệ số góc k = y'(2) = 3.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 23. Cho hàm số (C): $y = \frac{x}{x^2+1}$. Tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành có phương trình:

A. y = -x + 1. **B.** y = -x. **C.** y = x. **D.** y = x + 1.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow M(0; 0).$$

Ta có: $y' = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow y'(0) = 1.$

Từ đó, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

$$(d): y = y'_{(0)}(x - 0) + y(0) \Leftrightarrow (d): y = x.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt:

▪ Vì (C) $\cap$ Ox = M(0; 0) nên các đáp án A và D bị loại do không đi qua M.

▪ Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS ta tính y'(0) bằng cách ấn:

MODE 1

SHIFT d/dx ALPHA X ÷ (ALPHA X x^2 + 1) , 0) = 1

Tức là y'(0) = 1, suy ra đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt:

▪ Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS ta tính y'(0) bằng cách ấn:

MODE 1

SHIFT d/dx ALPHA X ÷ (ALPHA X x^2 + 1) , 0) = 1

Tức là y'(0) = 1, suy ra các đáp án A và B bị loại.

▪ Với kết quả trong D thì (d) $\cap$ Ox = M(-1; 0) $\notin$ (C) nên đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 3:* Ta lần lượt:

▪ Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS ta tính y'(0) bằng cách ấn:

MODE 1

SHIFT d/dx ALPHA X ÷ (ALPHA X x^2 + 1) , 0) = 1

Tức là y'(0) = 1, suy ra các đáp án A và B bị loại.

▪ Với đường thẳng trong đáp án C, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x}{x^2+1} = x \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow \text{Nghiệm kép } x = 0\text{, thỏa mãn.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 4:* Ta lần lượt:

▪ Với đường thẳng trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

$$\frac{x}{x^2+1} = 1 - x\text{, không có nghiệm } x = 0 \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

- Với đường thẳng trong đáp án B, ta có phương trình hoành độ:

$\frac{x}{x^2+1} = -x \Leftrightarrow x^3 + 2x = 0$, không có nghiệm bội $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

- Với đường thẳng trong đáp án C, ta có phương trình hoành độ:

$\frac{x}{x^2+1} = x \Leftrightarrow x^2 = 0 \Rightarrow$ Nghiệm bội $x = 0$, thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 5:* Ta lần lượt:

- Với đường thẳng trong đáp án D, ta có phương trình hoành độ:

$\frac{x}{x^2+1} = x + 1$, không có nghiệm $x = 0 \Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

- Với đường thẳng trong đáp án C, ta có phương trình hoành độ:

$\frac{x}{x^2+1} = x \Leftrightarrow x^2 = 0 \Rightarrow$ Nghiệm bội $x = 0$, thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 24. Cho hàm số (C): $y = \sqrt{x+3}$. Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = 6$ song song với đường thẳng:

A. $x - 6y = 0$. **B.** $x - 4y = 0$. **C.** $x - 2y = 0$. **D.** $x - y = 0$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \Rightarrow$ Hệ số góc tiếp tuyến $k = y'(6) = \frac{1}{2\sqrt{6+3}} = \frac{1}{6}$

Vậy, tiếp tuyến song song với đường thẳng $x - 6y = 0$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS : Để tính y'(6) ta thực hiện:

[MODE] [1]

[SHIFT] [d/dx] [√] [(] [ALPHA] [X] [+] 3 [)] [,] 6 [)] [=] 　　　　[0.1666]

Vậy, ta được $y'(6) \approx 0.1666 \approx \frac{1}{6}$. Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 25. Cho hàm số (C): $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$. Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ x = 1 cắt các trục Ox, Oy theo thứ tự tại A và B. Diện tích DABC bằng:

A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có: $y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{2}$.

Từ đó, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) có dạng:

$$(d): y = y'_{(1)}(x - 1) + y(1) \Leftrightarrow (d): y = \frac{1}{2}(x - 1) + 1 \Leftrightarrow (d): x - 2y + 1 = 0.$$

Khi đó:

- Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 0) \Rightarrow OA = 1.$$

- Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 \end{cases} \Rightarrow B\left(0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow OB = \frac{1}{2}.$$

- Diện tích ΔABC được cho bởi:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.1.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ (đvdt)}.$$

Bài 26. Cho hàm số $y = \ln(1 + x^2)$. Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ x = -1, có hệ số góc bằng:

A. ln2. B. -1. C. $\frac{1}{2}$. D. 0.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có: $y' = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow$ Hệ số góc $k = y'(-1) = \frac{-2}{1+(-1)^2} = -1$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Để tính y'(-1) ta thực hiện:

MODE 1

SHIFT d/dx ln (1 + ALPHA X x²) , (-) 1) = → −0.9999

Vậy, ta được hệ số góc k = y'(-1) = -1.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 27. Cho hàm số (C): $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ x = ln2 tạo với chiều dương của trục Ox một góc α. Giá trị tanα bằng:

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{9}{16}$. D. $\frac{16}{25}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \Rightarrow y' = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$\Rightarrow \tan\alpha = y'(\ln 2) = \frac{4e^{2\ln 2}}{(e^{2\ln 2} + 1)^2} = \frac{16}{25}$, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Để tính y'(6) ta thực hiện:

MODE 1

SHIFT d/dx (ALPHA e ^ ALPHA X

– ALPHA e ^ ((–) ALPHA X))

÷ (ALPHA e ^ ALPHA X

\+ ALPHA e ^ ((–) ALPHA X)) , ln 2)

= 0.64

$a^{b/c}$ 16⌟25

Vậy, ta được $\tan\alpha = y'(\ln 2) = \frac{16}{25}$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 28. Số đường thẳng đi qua điểm A(0; 2) và tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = x^2 + 1$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đường thẳng đi qua A có phương trình: (d): y = kx + 2.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + 1 = kx + 2 \\ 2x = k \end{cases} \Rightarrow x^2 = -1, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, qua A không kẻ được đường thẳng nào tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^2 + 1$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại M có dạng:

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = 2x_0x - 2x_0^2 + x_0^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (d): y = 2x_0x - x_0^2 + 1.$$

Để (d) đi qua điểm A điều kiện là:

$$2 = -x_0^2 + 1 \Leftrightarrow x_0^2 = -1, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, qua A không kẻ được đường thẳng nào tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Vì điểm A nằm trong Parabol $y = x^2 + 1$ (vì xét dấu $0 + 1 - 2 = -1 < 0$) nên qua A không kẻ được tiếp tuyến tới đồ thị hàm số.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Chú ý: Với Parabol (P) thì:

- Nếu điểm A nằm trong (P) sẽ không kẻ được tiếp tuyến tới (P).
- Nếu điểm A nằm trên (P) sẽ kẻ được đúng một tiếp tuyến tới (P). Đặc biệt, nếu A là đỉnh của (P) thì tiếp tuyến sẽ song song với Ox.
- Nếu điểm A nằm ngoài (P) sẽ kẻ được hai tiếp tuyến tới (P).

Bài 29. *Số đường thẳng đi qua điểm* A(1; 2) *và tiếp xúc với đồ thị hàm số* (P): $y = 2x^2$ *bằng*:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đường thẳng đi qua A có phương trình:

$$(d): y = k(x - 1) + 2.$$

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 2x^2 = k(x-1)+2 \\ 4x = k \end{cases} \Rightarrow 2x^2 = 4x(x - 1) + 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, qua A kẻ được đúng một đường thẳng tiếp xúc với (P).

➢ *Lời giải tự luận 2:* Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = 2x_0^2$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại M có dạng:

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = 4x_0x - 4x_0^2 + 2x_0^2$$

$$\Leftrightarrow (d): y = 4x_0x - 2x_0^2.$$

Để (d) đi qua điểm A, điều kiện là:

$$2 = 4x_0 - 2x_0^2 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Vậy, qua A kẻ được đúng một đường thẳng tiếp xúc với (P).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Vì điểm $A \in (P)$ nên qua A kẻ được đúng một đường thẳng tiếp xúc với (P).

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 30. *Cho hàm số* (P): $y = x^2 - 3x + 2$. *Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm* $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ *có dạng:*

A. $x + y - 1 = 0$ và $x - y - 2 = 0$.

B. $x + y - 1 = 0$ và $x + 3y = 0$.

C. $x + y - 2 = 0$ và $x - y - 2 = 0$.

D. $x + y - 2 = 0$ và $x + 3y = 0$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Đường thẳng đi qua M có phương trình:

$$(d):\ y = k\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}.$$

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = k\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} \\ 2x - 3 = k \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (2x - 3)\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $k_1 = -1$, ta được tiếp tuyến (d_1) có phương trình:

$$(d_1):\ y = -\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow (d_1): x + y - 1 = 0.$$

- Với $k_2 = 1$, ta được tiếp tuyến (d_1) có phương trình:

$$(d_2):\ y = \left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow (d_2): x - y - 2 = 0.$$

Vậy, qua M kẻ được hai tiếp tuyến (d_1) và (d_2) tới (P).

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^2 - 3x_0 + 2$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại M có dạng:

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = (2x_0 - 3)(x - x_0) + x_0^2 - 3x_0 + 2.$$

Để (d) đi qua điểm M, điều kiện là:

$$-\frac{1}{2} = (2x_0 - 3)\left(\frac{3}{2} - x_0\right) + x_0^2 - 3x_0 + 2 \Leftrightarrow x_0^2 - 3x_0 + 2 = 0$$

$\Leftrightarrow x_0 = 1$ hoặc $x_0 = 2$.

Khi đó:

- Với $x_0 = 1$, ta được tiếp tuyến (d_1) có phương trình:

  (d_1): $y = (2 - 3)(x - 1) + 1 - 3 + 2 \Leftrightarrow (d_1)$: $x + y - 1 = 0$.

- Với $x_0 = 2$, ta được tiếp tuyến (d_1) có phương trình:

  (d_2): $y = (4 - 3)(x - 2) + 4 - 6 + 2 \Leftrightarrow (d_2)$: $x - y - 2 = 0$.

Vậy, qua M kẻ được hai tiếp tuyến (d_1) và (d_2) tới (P).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt:

- Vì đường thẳng $x + y - 2 = 0$ không đi qua M nên các đáp án C và D bị loại.
- Với đường thẳng $x - y - 2 = 0$ trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

  $x^2 - 3x + 2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$, có nghiệm bội $x = 2$, thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận 1* để lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $A(x_A, y_A)$ chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đường thẳng (d) đi qua $A(x_A, y_A)$ có phương trình: (d): $y = k(x - x_A) + y_A$

Bước 2: (d) tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = f'(x).(x - x_A) + y_A \quad (1) \\ f'(x) = k \end{cases} \Rightarrow k$$

Bước 3: Kết luận về tiếp tuyến (d).

- *Trong cách giải tự luận 2,* để lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $A(x_A, y_A)$ chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử tiếp điểm là $M(x_0, y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

  (d): $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Bước 2: Điểm $A(x_A, y_A) \in (d)$, ta được:

  $y_A = y'(x_0)(x_A - x_0) + y_0 \Rightarrow x_0$.

Bước 3: Kết luận về tiếp tuyến (d).

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* chúng ta đi kiểm tra xem các đường thẳng (d_1), (d_2) và (d_3) cho bởi các lựa chọn trắc nghiệm có đi qua A không? Từ đó, suy ra được đáp án đúng.

Bài 31. Cho hàm số (P): $y = x^2$. Hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $M\left(\frac{1}{2}; -2\right)$ tiếp xúc với (P) tại A và B. Phương trình (AB) có dạng:

A. $y = x + 6$. B. $y = x + 2$. C. $y = -x + 2$. D. $y = -x + 6$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Đường thẳng đi qua M có phương trình: (d): $y = k\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm và nghiệm x là hoành độ tiếp điểm:

$$\begin{cases} x^2 = k\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2 \\ 2x = k \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2x(2x - 1) - 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 2 \Rightarrow A(-1; 1) \text{ và } B(2; 4).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(-1; 1) \\ \text{qua } B(2; 4) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x+1}{2+1} = \frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow (AB): y = x + 2.$$

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^2$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại M có dạng:

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2.$$

Để (d) đi qua điểm M điều kiện là:

$$-2 = 2x_0\left(\frac{1}{2} - x_0\right) + x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ hoặc } x_0 = 2$$

$$\Rightarrow A(-1; 1) \text{ và } B(2; 4).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(-1; 1) \\ \text{qua } B(2; 4) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x+1}{2+1} = \frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow (AB): y = x + 2.$$

➢ ***Lời giải tự luận 3:*** Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^2$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại M có dạng:

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = 2x_0(x - x_0) + y_0$$

$$\Leftrightarrow (d): y = 2x_0x - 2x_0^2 + y_0 \Leftrightarrow (d): y = 2x_0x - y_0.$$

Điểm M ∈ (d), ta được: ⇔ (d): $-2 = x_0 - y_0 \Leftrightarrow y_0 = x_0 + 2$. (*)

Nhận xét rằng toạ độ hai tiếp điểm A, B đều thoả mãn (*), do đó phương trình đường thẳng (AB) có dạng $y = x + 2$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt:

▪ Với đường thẳng $y = x + 6$ trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

$$x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -2.$$

Xét tiếp tuyến tại A(3; 9) của (P) có phương trình:

$$(d_A): y = y'(3)(x - 3) + 9 \Leftrightarrow (d_A): y = 6(x - 3) + 9 \Leftrightarrow (d_A): y = 6x - 9.$$

Tiếp tuyến này không đi qua M nên đáp án A bị loại.

▪ Với đường thẳng $y = x + 2$ trong đáp án B, ta có phương trình hoành độ:

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -1.$$

Xét tiếp tuyến tại B(2; 4) của (P) có phương trình:

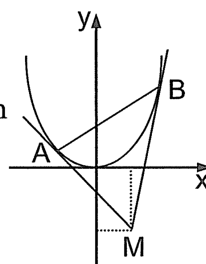
$$(d_B): y = y'(2)(x - 2) + 4 \Leftrightarrow (d_B): y = 4(x - 2) + 4 \Leftrightarrow (d_A): y = 4x - 4.$$

Tiếp tuyến này đi qua M (thỏa mãn).

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt:

▪ Phác thảo hình vẽ (hình bên) ta thấy đường thẳng (AB) có hướng đi lên, do đó các đáp án C và D bị loại.



▪ Với đường thẳng $y = x + 6$ trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

$$x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -2.$$

Xét tiếp tuyến tại A(3; 9) của (P) có phương trình:

$$(d_A): y = y'(3)(x - 3) + 9 \Leftrightarrow (d_A): y = 6(x - 3) + 9 \Leftrightarrow (d_A): y = 6x - 9.$$

Tiếp tuyến này không đi qua M nên đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 32. Cho hàm số (P): $y = x^2 - 1$. Hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ tiếp xúc với (P) tại A và B. Tọa độ trung điểm của AB là:

A. $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$. B. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. C. $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. D. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đường thẳng đi qua M có phương trình: (d): $y = k\left(x - \frac{3}{2}\right) + 1$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm và nghiệm x là hoành độ tiếp điểm:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = k\left(x - \frac{3}{2}\right) + 1 \\ 2x = k \end{cases} \Rightarrow x^2 - 1 = 2x\left(x - \frac{3}{2}\right) + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2 \Rightarrow A(1; 0)$ và $B(2; 3) \Rightarrow$ Trung điểm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^2 - 1$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại M có dạng:

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 - 1.$$

Để (d) đi qua điểm M điều kiện là:

$$1 = 2x_0\left(\frac{3}{2} - x_0\right) + x_0^2 - 1 \Leftrightarrow x_0^2 - 3x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ hoặc } x_0 = 2$$

$\Rightarrow A(1; 0)$ và $B(2; 3) \Rightarrow$ Trung điểm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Bài 33. Số đường thẳng đi qua điểm A(3; 2) và tiếp xúc với đồ thị hàm số (C): $y = x^3 - 3x$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Đường thẳng đi qua A có phương trình: (d): $y = k(x - 3) + 2$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 3x = k(x - 3) + 2 \\ 3x^2 - 3 = k \end{cases}$$

$\Rightarrow x^3 - 3x = (3x^2 - 3)(x - 3) + 2 \Leftrightarrow 2x^3 - 9x^2 + 11 = 0.$ (*)

Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS để biết số nghiệm của phương trình (*) bằng cách ấn:

MODE 1

MODE MODE MODE 1 ▶ 3

2 = (−) 9 = 0 = 11 =	4.186
▼	1.314
▼	-1

Tức là, phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.

Vậy, qua A kẻ được ba đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS - Học sinh tự thực hiện.

Bài 34. Số đường thẳng đi qua điểm A(2; 1) và tiếp xúc với đồ thị hàm số (C): $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Đường thẳng đi qua A có phương trình: (d): $y = k(x - 2) + 1$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = k(x-2) + 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 = k \end{cases}$$

$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = (3x^2 - 12x + 9)(x - 2) + 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ là nghiệm duy nhất.

Vậy, qua A kẻ được đúng một đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 1$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại M có dạng:

(d): $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow$ (d): $y = (3x_0^2 - 12x_0 + 9)(x - x_0) + x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 1$.

Để (d) đi qua điểm A điều kiện là:

$1 = (3x_0^2 - 12x_0 + 9)(2 - x_0) + x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 1$

$\Leftrightarrow x_0^3 - 6x_0^2 + 12x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$.

Vậy, qua A kẻ được đúng một đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Vì điểm A chính là điểm uốn của (C) nên qua A kẻ được đúng một tiếp tuyến tới (C).

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 35. Số đường thẳng đi qua điểm A(2; -3) và tiếp xúc với đồ thị hàm số (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đường thẳng đi qua A có phương trình: (d): y = k(x -2) - 3.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k(x-2) - 3 \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = (3x^2 - 6x)(x - 2) - 3$$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 - 7x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2(2x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{5}{2}$.

Vậy, qua A kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Đường thẳng đi qua A có phương trình:

(d): y = k(x -2) - 3.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k(x-2) - 3 \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = (3x^2 - 6x)(x - 2) - 3$$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{5}{2}$ bằng cách ấn:

[MODE] [1]

[MODE] [MODE] [MODE] [1] [▶] [3]

2 [=] [(–)] 9 [=] 12 [=] [(–)] 5 [=] — 2.5

[▼] — 1

Vậy, qua A kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + 2$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại M có dạng:

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2.$$

Để (d) đi qua điểm A điều kiện là:

$-3 = (3x_0^2 - 6x_0)(2 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2 \Leftrightarrow 2x_0^3 - 9x_0^2 + 12x_0 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)(2x_0^2 - 7x_0 + 5) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$ hoặc $x_0 = \frac{5}{2}$.

Vậy, qua A kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

Bài 36. Cho hàm số (C): $y = x^3 + 3x^2 - 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3}; -2\right)$ có dạng:

A. y = -2 và y = -3x - 3.

B. y = -2 và y = 3x - 1.

C. y = 6x và y = -3x - 3.

D. y = 6x và y = 3x - 1.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận 1:*

Đường thẳng đi qua M có phương trình: (d): $y = k\left(x + \frac{1}{3}\right) - 2$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 2 = k\left(x + \frac{1}{3}\right) - 2 \\ 3x^2 + 6x = k \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 2 = (3x^2 + 6x)\left(x + \frac{1}{3}\right) - 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = -3 \end{array}\right.$$

Khi đó:

▪ Với $k_1 = 0$, ta được tiếp tuyến (d_1) có phương trình: (d_1): $y = -2$.

▪ Với $k_2 = -3$, ta được tiếp tuyến (d_2) có phương trình:

$$(d_2):\ y = -3\left(x + \frac{1}{3}\right) - 2 \Leftrightarrow (d_2): y = -3x - 3.$$

Vậy, qua M kẻ được hai tiếp tuyến (d_1) và (d_2) tới (C).

➢ *Lời giải tự luận 2:* Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^3 + 3x_0^2 - 2$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại A có dạng:

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = (3x_0^2 + 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 2.$$

Để (d) đi qua điểm M điều kiện là:

$$-2 = (3x_0^2 + 6x_0)\left(-\frac{1}{3} - x_0\right) + x_0^3 + 3x_0^2 - 2 \Leftrightarrow x_0^3 + 2x_0^2 + x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ hoặc } x_0 = -1.$$

Khi đó:

▪ Với $x_0 = 0$, ta được tiếp tuyến (d_1) có phương trình:

$$(d): y = 0(x - 0) + 0 - 2 \Leftrightarrow (d_1): y = -2.$$

▪ Với $x_0 = -1$, ta được tiếp tuyến (d_2) có phương trình:

$$(d_2): y = (3 - 6)(x + 1) - 1 + 3 - 2 \Leftrightarrow (d_2): y = -3x - 3.$$

Vậy, qua M kẻ được hai tiếp tuyến (d_1) và (d_2) tới (P).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt:

▪ Với đường thẳng y = -2 trong đáp án A, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$x^3 + 3x^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 0$, có nghiệm bội $x = 0$, thỏa mãn

$\Rightarrow$ Các đáp án C và D bị loại.

▪ Với đường thẳng $y = -3x - 3$ trong đáp án A, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$x^3 + 3x^2 - 2 = -3x - 3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^3 = 0$, có nghiệm bội $x = -1$, thỏa mãn

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt:

▪ Với đường thẳng $y = 3x - 1$ trong đáp án D, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$x^3 + 3x^2 - 2 = 3x - 1 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 4x + 1) = 0$

không có nghiệm bội, nên các đáp án B và D bị loại.

▪ Với đường thẳng $y = -2$ trong đáp án A, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$x^3 + 3x^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 0$, có nghiệm bội $x = 0$, thỏa mãn

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 37. Cho hàm số (C): $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm M(3; 1) có dạng:

A. $y = 1$ và $y = 9x - 26$.
B. $y = 1$ và $y = x - 2$.
C. $y = 2x - 5$ và $y = 9x - 26$.
D. $y = 2x - 5$ và $y = x - 2$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Đường thẳng đi qua M có phương trình: (d): $y = k(x - 3) + 1$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = k(x-3) + 1 \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = (3x^2 - 6x)(x - 3) + 1.$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 12x^2 + 18x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = 9 \end{array}\right.$$

Khi đó:

▪ Với $k_1 = 0$, ta được tiếp tuyến (d_1) có phương trình: (d_1): $y = 1$.

▪ Với $k_2 = 9$, ta được tiếp tuyến (d_2) có phương trình:

(d_2): $y = 9(x - 3) + 1 \Leftrightarrow (d_2)$: $y = 9x - 26$.

Vậy, qua M kẻ được hai tiếp tuyến (d_1) và (d_2) tới (C).

➢ *Lời giải tự luận 2:* Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + 1$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại A có dạng:

(d): $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow$ (d): $y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 1$.

Để (d) đi qua điểm M điều kiện là:

$1 = (3x_0^2 - 6x_0)(3 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 1 \Leftrightarrow x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 3$.

Khi đó:

▪ Với $x_0 = 0$, ta được tiếp tuyến (d_1) có phương trình:

(d_1): (d): $y = 0(x - 0) + 1 \Leftrightarrow (d_1)$: $y = 1$.

▪ Với $x_0 = 3$, ta được tiếp tuyến (d_2) có phương trình:

(d_2): $y = (27 - 18)(x - 3) + 27 - 27 + 1 \Leftrightarrow (d_2)$: $y = 9x - 26$.

Vậy, qua M kẻ được hai tiếp tuyến (d_1) và (d_2) tới (P).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt:

▪ Với đường thẳng y = 1 trong đáp án A, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$x^3 - 3x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0$, có nghiệm bội x = 0, thỏa mãn

$\Rightarrow$ Các đáp án C và D bị loại.

▪ Với đường thẳng y = 9x - 26 trong đáp án A, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$x^3 - 3x^2 + 1 = 9x - 26 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 - 9) = 0$

có nghiệm bội x = 3, thỏa mãn

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt:

▪ Với đường thẳng y = x - 2 trong đáp án D, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$x^3 - 3x^2 + 1 = x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 3) = 0$

không có nghiệm bội, nên các đáp án B và D bị loại.

▪ Với đường thẳng y = 1 trong đáp án A, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$x^3 - 3x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0$, có nghiệm bội x = 0, thỏa mãn

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 3:* Ta lần lượt:

▪ Vì điểm $M \in (C)$ nên qua M có một tiếp tuyến (tại điểm M) dạng:

$y = y'(3)(x - 3) + 1 \Leftrightarrow y = 9(x - 3) + 1 \Leftrightarrow y = 9x - 26$

$\Rightarrow$ Các đáp án B và D bị loại.

▪ Với đường thẳng y = 1 trong đáp án A, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$x^3 - 3x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0$, có nghiệm bội x = 0, thỏa mãn

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 38. Cho hàm số (C): $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(\frac{23}{9}; -2)$ có dạng:

A. (d_1): y = 2, (d_2): y = 9x + 25 và (d_3): $y = -\frac{5}{3}x - \frac{61}{27}$.

B. (d_1): y = -2, (d_2): y = 9x + 25 và (d_3): $y = -\frac{5}{3}x - \frac{61}{27}$.

C. (d_1): y = 2, (d_2): y = 9x - 25 và (d_3): $y = -\frac{5}{3}x + \frac{61}{27}$.

D. (d_1): y = -2, (d_2): y = 9x - 25 và (d_3): $y = -\frac{5}{3}x + \frac{61}{27}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Đường thẳng (d) qua A có phương trình:

$$y = k(x - \frac{23}{9}) - 2. \qquad (1)$$

Đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k(x - \frac{23}{9}) - 2 \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = (3x^2 - 6x)(x - \frac{23}{9}) - 2 \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \\ x = 1/3 \end{array}\right. \\ k = 3x^2 - 6x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 9 \\ k = -5/3 \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với k = 0 thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_1): y = -2.
- Với k = 9 thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_2): y = 9x - 25.
- Với $k = -\frac{5}{3}$ thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_3): $y = -\frac{5}{3}x + \frac{61}{27}$.

Vậy, tồn tại ba tiếp tuyến (d_1), (d_2), (d_3) của đồ thị thoả mãn điều kiện.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Giả sử tiếp điểm là $M(x_0, y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y = y'_{(x_0)}(x - x_0) + y_0$$

$$\Leftrightarrow (d): y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2. \qquad (2)$$

Điểm A ∈ (d), ta được: $-2 = (3x_0^2 - 6x_0)(\frac{23}{9} - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)(-2x_0^2 + \frac{20}{3}x_0 - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = 3 \\ x_0 = 1/3 \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với $x_0 = 2$ thay vào (2) ta được tiếp tuyến (d_1): y = -2.
- Với $x_0 = 3$ thay vào (2) ta được tiếp tuyến (d_2): y = 9x - 25.
- Với $x_0 = \frac{1}{3}$ thay vào (2) ta được tiếp tuyến (d_3): $y = -\frac{5}{3}x + \frac{61}{27}$.

Vậy, tồn tại ba tiếp tuyến (d_1), (d_2), (d_3) của đồ thị thoả mãn điều kiện.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Điểm A không thuộc đường thẳng (d_1) trong lựa chọn A nên đáp án A bị loại.
- Điểm A không thuộc đường thẳng (d_2) trong lựa chọn B nên đáp án B bị loại.
- Điểm A không thuộc đường thẳng (d_3) trong lựa chọn C nên đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 39. Cho hàm số (C): $y = x^4 - 4x^2 + 1$. Số đường thẳng đi qua điểm A(0; 1) và tiếp xúc với đồ thị hàm số bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đường thẳng đi qua A có phương trình: (d): y = kx + 1.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 1 = kx + 1 \\ 4x^3 - 8x = k \end{cases} \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 1 = (4x^3 - 8x)x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2/\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy, qua A kẻ được ba đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^4 - 4x_0^2 + 1$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại M có dạng: (d): $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

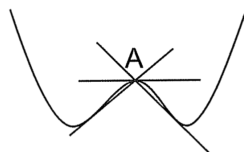
$\Leftrightarrow$ (d): $y = (4x_0^3 - 8x_0)(x - x_0) + x_0^4 - 4x_0^2 + 1$.

Để (d) đi qua điểm A điều kiện là:

$$1 = -(4x_0^3 - 8x_0)x_0 + x_0^4 - 4x_0^2 + 1 \Leftrightarrow 3x_0^4 - 4x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ hoặc } x_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Vậy, qua A kẻ được ba đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Vì điểm A là điểm cực tiểu (ở chính giữa) của ba điểm cực trị của đồ thị hàm số, do đó qua A luôn kẻ được ba tiếp tuyến tới đồ thị hàm số.



Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 40. Cho hàm số (C): $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Số đường thẳng đi qua điểm A(0; 4) và tiếp xúc với đồ thị hàm số bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đường thẳng đi qua A có phương trình: (d): $y = kx + 4$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 + 3 = kx + 4 \\ 4x^3 - 4x = k \end{cases} \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 3 = x(4x^3 - 4x) + 4$$

$\Leftrightarrow 3x^4 - 2x^2 + 1 = 0$, vô nghiệm.

Vậy, qua A không kẻ được đường thẳng nào tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^4 - 2x_0^2 + 3$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại M có dạng:

(d): $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

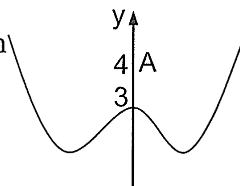
$\Leftrightarrow$ (d): $y = (4x_0^3 - 4x_0)(x - x_0) + x_0^4 - 2x_0^2 + 3$.

Để (d) đi qua điểm A điều kiện là:

$$4 = -(4x_0^3 - 4x_0)x_0 + x_0^4 - 2x_0^2 + 3 \Leftrightarrow 3x_0^4 - 2x_0^2 + 1 = 0, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, qua A không kẻ được đường thẳng nào tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Vì điểm A là điểm ở phía trên điểm cực tiểu (ở chính giữa) của ba điểm cực trị của đồ thị hàm số, do đó qua A không kẻ được tiếp tuyến tới đồ thị hàm số.



Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 41. Cho hàm số (C): $y = x^4 - 3x^2 + 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm M(0; 1) có dạng:

A. $y = 1$. **B.** $y = 2x + 1$. **C.** $y = -2x + 1$. **D.** Cả A, B, C.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Đường thẳng đi qua M có phương trình: (d): $y = kx + 1$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2 + 1 = kx + 1 \\ 4x^3 - 6x = k \end{cases} \Rightarrow x^4 - 3x^2 + 1 = (4x^3 - 6x)x + 1$$

$\Leftrightarrow 3x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1$ và $x = 1$.

Khi đó:

- Với $x = 0$, ta được $k = 0$ và tiếp tuyến (d_1): $y = 1$.
- Với $x = -1$, ta được $k = 2$ tiếp tuyến (d_2): $y = 2x + 1$.
- Với $x = 1$, ta được $k = -2$ tiếp tuyến (d_3): $y = -2x + 1$.

Vậy, qua M kẻ được ba tiếp tuyến (d_1), (d_2) và (d_3) tới (C).

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^4 - 3x_0^2 + 1$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại A có dạng:

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = (4x_0^3 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^4 - 3x_0^2 + 1.$$

Để (d) đi qua điểm M điều kiện là:

$$1 = -(4x_0^3 - 6x_0)x_0 + x_0^4 - 3x_0^2 + 1 \Leftrightarrow 3x_0^4 - 3x_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^2(x_0^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = -1 \text{ và } x_0 = 1.$$

Khi đó:

- Với $x_0 = 0$, ta được tiếp tuyến (d_1): $y = 1$.
- Với $x_0 = -1$, ta được tiếp tuyến (d_2): $y = 2x + 1$.
- Với $x_0 = 1$, ta được tiếp tuyến (d_3): $y = -2x + 1$.

Vậy, qua M kẻ được ba tiếp tuyến (d_1), (d_2) và (d_3) tới (C).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt:

- Với đường thẳng $y = 1$ trong đáp án A, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$x^4 - 3x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0$, có nghiệm bội $x = 0$, thỏa mãn

$\Rightarrow$ Các đáp án B và C bị loại.

- Với đường thẳng $y = 2x + 1$ trong đáp án B, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$x^4 - 3x^2 + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x(x + 1)^2(x - 2) = 0$, có nghiệm bội $x = -1$, thỏa mãn

$\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 42. Cho hàm số (C): $y = x^4 - 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm M(0; -4) có dạng:

A. $y = -4$ và $y = -4x - 4$.

B. $y = 4x - 4$ và $y = -4x - 4$.

C. $y = -4$ và $y = 4x - 4$.

D. $y = x - 4$ và $y = -x - 4$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đường thẳng đi qua M có phương trình: (d): $y = kx - 4$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^4 - 1 = kx - 4 \\ 4x^3 = k \end{cases} \Rightarrow x^4 - 1 = 4x^4 - 4 \Leftrightarrow 3x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Khi đó:

- Với $x = 1$, ta được $k = 4$ và tiếp tuyến (d_1): $y = 4x - 4$.
- Với $x = -1$, ta được $k = -4$ tiếp tuyến (d_2): $y = -4x - 4$.

Vậy, qua M kẻ được hai tiếp tuyến (d_1) và (d_2) tới (C).

➢ *Lời giải tự luận 2:* Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^4 - 1$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại A có dạng: (d): $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow$ (d): $y = 4x_0^3(x - x_0) + x_0^4 - 1$.

Để (d) đi qua điểm M điều kiện là: $-4 = -4x_0^4 + x_0^4 - 1 \Leftrightarrow 3x_0^4 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$.

Khi đó:

- Với $x_0 = 1$, ta được tiếp tuyến (d_1): $y = 4x - 4$.
- Với $x_0 = -1$, ta được tiếp tuyến (d_2): $y = -4x - 4$.

Vậy, qua M kẻ được ba tiếp tuyến (d_1) và (d_2) tới (C).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt:

- Với đường thẳng $y = -4$ trong đáp án A, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$$x^4 - 1 = -4 \Leftrightarrow x^4 = -5, \text{ vô nghiệm} \Rightarrow \text{Các đáp án A và C bị loại.}$$

- Với đường thẳng $y = 4x - 4$ trong đáp án B, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$$x^4 - 1 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^4 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + x^2 + x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 + 2x + 3) = 0, \text{ có nghiệm bội } x = 1, \text{ thỏa mãn}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 43. Cho hàm số (C): $y = x^4 - 4x^2 + 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm M(2; 2) có dạng:

A. $y = 1, y = 16x - 30, y = \frac{32}{27}x + \frac{10}{27}$.

B. $y = 1, y = 16x + 30, y = \frac{32}{27}x + \frac{10}{27}$.

C. $y = 2, y = 16x - 30, y = \frac{32}{27}x - \frac{10}{27}$.

D. $y = 2, y = 16x + 30, y = \frac{32}{27}x - \frac{10}{27}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1 kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Đường thẳng đi qua M có phương trình: (d): $y = k(x - 2) + 2$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 2 = k(x-2) + 2 \\ 4x^3 - 8x = k \end{cases} \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 2 = (4x^3 - 8x)(x - 2) + 2.$

$\Leftrightarrow 3x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 16x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x^3 - 8x^2 - 4x + 16 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = 0, x = -\frac{4}{3}$ và $x = 2$.

Khi đó:

- Với $x = 0$, ta được $k = 0$ và tiếp tuyến (d_1) có phương trình: (d_1): $y = 2$.
- Với $x = -\frac{4}{3}$, ta được $k = \frac{32}{27}$ tiếp tuyến (d_2) có phương trình:

  (d_2): $y = \frac{32}{27}(x - 2) + 2 \Leftrightarrow (d_2)$: $y = \frac{32}{27}x - \frac{10}{27}$.
- Với $x = 2$, ta được $k = 16$ tiếp tuyến (d_3) có phương trình:

  (d_3): $y = 16(x - 2) + 2 \Leftrightarrow (d_3)$: $y = 16x - 30$.

Vậy, qua M kẻ được ba tiếp tuyến (d_1), (d_2) và (d_3) tới (C).

➢ *Lời giải tự luận 2:* Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^4 - 4x_0^2 + 2$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại A có dạng:

(d): $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d)$: $y = (4x_0^3 - 8x_0)(x - x_0) + x_0^4 - 4x_0^2 + 2$.

Để (d) đi qua điểm M điều kiện là:

$2 = (4x_0^3 - 8x_0)(2 - x_0) + x_0^4 - 4x_0^2 + 2 \Leftrightarrow 3x_0^4 - 8x_0^3 - 4x_0^2 + 16x_0 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ 3x_0^3 - 8x_0^2 - 4x_0 + 16 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_0 = 0, x_0 = -\frac{4}{3}$ và $x_0 = 2$.

Khi đó:

- Với $x_0 = 0$, ta được tiếp tuyến (d_1): $y = 2$.
- Với $x_0 = -\frac{4}{3}$, ta được tiếp tuyến (d_2): $y = \frac{32}{27}x - \frac{10}{27}$.
- Với $x_0 = 2$, ta được tiếp tuyến (d_3): $y = 16x - 30$.

Vậy, qua M kẻ được ba tiếp tuyến (d_1), (d_2) và (d_3) tới (C).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt:

- Với đường thẳng $y = 1$ trong đáp án A, nó không đi qua điểm M nên các đáp án A và B bị loại.

▪ Với đường thẳng y = 16x - 30 trong đáp án C, nó đi qua điểm M và ta có phương trình hoành độ:

$x^4 - 4x^2 + 2 = 16x - 30 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 16x + 32 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x^3 + 2x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 2)(x^2 + 3x + 8) = 0$

có nghiệm bội x = 2, thỏa mãn

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt:

▪ Với đường thẳng y = 1 trong đáp án A, nó không đi qua điểm M nên các đáp án A và B bị loại.

▪ Vì điểm $M \in (C)$ nên qua M có một tiếp tuyến (tại điểm M) dạng:

$y = y'(2)(x - 2) + 2 \Leftrightarrow y = 16(x - 2) + 2 \Leftrightarrow y = 16x - 30 \Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 44. Cho hàm số (C): $y = x^4 - x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm A(-1; 0) có dạng:

A. (d_1): y = x + 1, (d_2): y = 2x + 2 và (d_3): $y = \frac{4}{27}x + \frac{4}{27}$.

B. (d_1): y = -x - 1, (d_2): y = 3x + 3 và (d_3): y = 4x + 4.

C. (d_1): y = 0, (d_2): y = -2x - 2 và (d_3): y = 2x + 2.

D. (d_1): y = 0, (d_2): y = -2x - 2 và (d_3): $y = -\frac{4}{27}x - \frac{4}{27}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Đường thẳng (d) qua A có phương trình: y = k(x + 1). (1)

Đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^4 - x^2 = k(x+1) \\ 4x^3 - 2x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 = (4x^3 - 2x)(x+1) \\ 4x^3 - 2x = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(3x^2 + x - 2) = 0 \\ 4x^3 - 2x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2/3 \end{array}\right. \\ k = 4x^3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -2 \\ k = 0 \\ k = -4/27 \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với $k = 0$ thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_1): $y = 0$.
- Với $k = -2$ thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_2): $y = -2x - 2$.
- Với $k = -\frac{4}{27}$ thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_3): $y = -\frac{4}{27}x - \frac{4}{27}$.

Vậy, tồn tại ba tiếp tuyến (d_1), (d_2), (d_3) của đồ thị thoả mãn điều kiện.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Giả sử tiếp điểm là $M(x_0, y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng: (d): $y = y'_{(x_0)}(x - x_0) + y_0$

$$\Leftrightarrow (d): y = (4x_0^3 - 2x_0)(x - x_0) + x_0^4 - x_0^2. \quad (2)$$

Điểm $A \in (d)$, ta được:

$$0 = (4x_0^3 - 2x_0)(-1 - x_0) + x_0^4 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0(x_0 + 1)(3x_0^2 + x_0 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 0,\ x_0 = -1 \text{ và } x_0 = \frac{2}{3}.$$

Khi đó:

- Với $x_0 = 0$ thay vào (2) ta được tiếp tuyến (d_1): $y = 0$.
- Với $x_0 = -1$ thay vào (2) ta được tiếp tuyến (d_2): $y = -2x - 2$.
- Với $x_0 = \frac{2}{3}$ thay vào (2) ta được tiếp tuyến (d_3): $y = -\frac{4}{27}x - \frac{4}{27}$.

Vậy, tồn tại ba tiếp tuyến (d_1), (d_2), (d_3) của đồ thị thoả mãn điều kiện.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt đánh giá:

- Với đường thẳng (d_2) trong lựa chọn A ta xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 - x^2 = 2x + 2 \\ 4x^3 - 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 - 2x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 - 2x - 2 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Hệ trên vô nghiệm, tức là (d_3) không là tiếp tuyến của (C), suy ra các đáp án A và C bị loại.

- Với đường thẳng (d_1) trong lựa chọn D ta xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 - x^2 = 0 \\ 4x^3 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ (tức là có nghiệm)}$$

Tức là (d_1) là tiếp tuyến của (C), suy ra đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt đánh giá:

- Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 2x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ và $y(0) = 0$

Điều đó chứng tỏ đồ thị hàm số tiếp xúc với trục tung, tức có một tiếp tuyến đi qua điểm A là y = 0. Suy ra, các đáp án A và B bị loại.

- Với đường thẳng (d_3) trong lựa chọn C ta xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 - x^2 = 2x + 2 \\ 4x^3 - 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 - 2x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 - 2x - 2 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Hệ trên vô nghiệm, tức là (d_3) không là tiếp tuyến của (C), suy ra đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 45. Cho hàm số (C): $y = x^4$. Hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $M\left(\frac{5}{4}; -8\right)$ tiếp xúc với (C) tại A và B. Phương trình (AB) có dạng:

A. y = x. **B.** y = 5x + 6. **C.** y = -5x + 6. **D.** y = -x.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đường thẳng đi qua M có phương trình: (d): $y = k\left(x - \frac{5}{4}\right) - 8$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm và nghiệm x là hoành độ tiếp điểm:

$$\begin{cases} x^4 = k\left(x - \frac{5}{4}\right) - 8 \\ 4x^3 = k \end{cases} \Rightarrow x^4 = 4x^3\left(x - \frac{5}{4}\right) - 8 \Leftrightarrow 3x^4 - 5x^3 - 8 = 0$$

$\Leftrightarrow (x + 1)(3x^3 - 8x^2 + 8x - 8) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2)(3x^2 - 2x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2 \Rightarrow A(-1; 1)$ và $B(2; 16)$.

Khi đó, phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(-1; 1) \\ \text{qua } B(2; 16) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x+1}{2+1} = \frac{y-1}{16-1} \Leftrightarrow (AB): y = 5x + 6.$$

➢ *Lời giải tự luận 1 kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Đường thẳng đi qua M có phương trình:

(d): $y = k\left(x - \frac{5}{4}\right) - 8$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm và nghiệm x là hoành độ tiếp điểm:

$$\begin{cases} x^4 = k\left(x - \frac{5}{4}\right) - 8 \\ 4x^3 = k \end{cases} \Rightarrow x^4 = 4x^3\left(x - \frac{5}{4}\right) - 8 \Leftrightarrow 3x^4 - 5x^3 - 8 = 0$$

$\Leftrightarrow (x + 1)(3x^3 - 8x^2 + 8x - 8) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$ bằng cách ấn:

MODE MODE MODE 1 ▶ 3

3 = (–) 8 = 8 = (–) 8 =

▼

2
R↔I

Khi đó, ta có hai tiếp điểm A(-1; 1) và B(2; 16) và phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(-1;1) \\ \text{qua } B(2;16) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x+1}{2+1} = \frac{y-1}{16-1} \Leftrightarrow (AB): y = 5x + 6.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng trích lược tự luận:* Đường thẳng đi qua M có phương trình:

$$(d): y = k\left(x - \frac{5}{4}\right) - 8.$$

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm và nghiệm x là hoành độ tiếp điểm:

$$\begin{cases} x^4 = k\left(x - \frac{5}{4}\right) - 8 \\ 4x^3 = k \end{cases} \Rightarrow x^4 = 4x^3\left(x - \frac{5}{4}\right) - 8 \Leftrightarrow 3x^4 - 5x^3 - 8 = 0$$

$\Leftrightarrow (x + 1)(3x^3 - 8x^2 + 8x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2 \Rightarrow A(-1; 1)$ và $B(2; 16)$.

Nhận xét rằng tọa độ các điểm A, B thỏa mãn phương trình đường thẳng trong B.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra $y_0 = x_0^4$ và phương trình tiếp tuyến (d) tại A có dạng:

$$(d): y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = 4x_0^3(x - x_0) + x_0^4.$$

Để (d) đi qua điểm M điều kiện là: $-8 = 4x_0^3\left(\frac{5}{4} - x_0\right) + x_0^4 \Leftrightarrow 3x_0^4 - 5x_0^3 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x_0 = -1$ hoặc $x_0 = 2 \Rightarrow A(-1; 1)$ và $B(2; 16)$.

Khi đó, phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(-1;1) \\ \text{qua } B(2;16) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \frac{x+1}{2+1} = \frac{y-1}{16-1} \Leftrightarrow (AB): y = 5x + 6.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt:

- Với đường thẳng $y = x$ trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

  $x^4 = x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

Xét tiếp tuyến tại A(0; 0) của (C) có phương trình:

$(d_A): y = y'(0)x \Leftrightarrow (d_A): y = 0.$

Tiếp tuyến này không đi qua M nên đáp án A bị loại.

▪ Với đường thẳng y = 5x + 6 trong đáp án B, ta có phương trình hoành độ:

$x^4 = 5x + 6 \Rightarrow x = -1$ là một nghiệm.

Xét tiếp tuyến tại B(-1; 1) của (C) có phương trình:

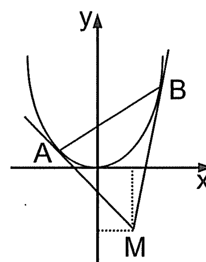
$(d_B): y = y'(-1)(x + 1) + 1 \Leftrightarrow (d_B): y = -4(x + 1) + 1 \Leftrightarrow (d_A): y = -4x - 3.$

Tiếp tuyến này đi qua M (thỏa mãn).

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt:

▪ Phác thảo hình vẽ (hình bên) ta thấy đường thẳng (AB) có hướng đi lên, do đó các đáp án C và D bị loại.



▪ Với đường thẳng y = x trong đáp án A, ta có phương trình hoành độ:

$x^4 = x \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

Xét tiếp tuyến tại A(0; 0) của (C) có phương trình:

$(d_A): y = y'(0)x \Leftrightarrow (d_A): y = 0.$

Tiếp tuyến này không đi qua M nên đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 46. Cho hàm số (C): $y = \frac{x+2}{x-2}$. Số đường thẳng đi qua điểm M(2; 1) và tiếp xúc với đồ thị hàm số (C) bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Đường thẳng đi qua M có phương trình:

(d): y = k(x - 2) + 1.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x-2} = k(x-2)+1 \\ \frac{-4}{(x-2)^2} = k \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{x-2} = \frac{-4}{(x-2)^2}.(x - 2) + 1$$

$\Leftrightarrow x + 2 = -4 + x - 2 \Leftrightarrow 2 = -6$, mâu thuẫn.

Vậy, qua M không kẻ được đường thẳng nào tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) tại A có dạng:

$$(d): y = y'_{(x_0)}(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = \frac{-4}{(x_0-2)^2}.(x - x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-2}.$$

Điểm $M \in (d)$, ta được:

$$1 = \frac{-4}{(x_0-2)^2}.(2 - x_0) + \frac{x_0+2}{x_0-2} \Leftrightarrow \frac{x_0+6}{x_0-2} = 1 \Leftrightarrow -2 = 6, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, qua M không kẻ được đường thẳng nào tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Vì điểm M chính là tâm đối xứng của đồ thị hàm số nên qua M không kẻ được tiếp tuyến tới đồ thị hàm số.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Chú ý: Với Hypebol (H): $\frac{ax+b}{cx+d}$ thì:

- Nếu điểm M nằm trong (H) hoặc M chính là tâm đối xứng của (H) sẽ không kẻ được tiếp tuyến tới (H).
- Nếu điểm M nằm trên (H) sẽ kẻ được đúng một tiếp tuyến tới (H).
- Nếu điểm M nằm ở miền ngoài của (H) sẽ kẻ được hai tiếp tuyến tới (H).

Bài 47. Cho hàm số (C): $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Số đường thẳng đi qua điểm M(1; -1) và tiếp xúc với đồ thị hàm số (C) bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đường thẳng đi qua M có phương trình:

$$(d): y = k(x - 1) - 1.$$

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} = k(x-1)-1 \\ \frac{3}{(x+1)^2} = k \end{cases} \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} = \frac{3}{(x+1)^2}.(x - 1) - 1$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(x + 1) = 3(x - 1) - (x + 1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 = -3, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, qua M không kẻ được đường thẳng nào tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Đường thẳng đi qua M có phương trình (d): $y = k(x - 1) - 1$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} = k(x-1) - 1 \\ \dfrac{3}{(x+1)^2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \dfrac{3}{x+1} = k(x+1) - 2k - 1 \\ \dfrac{3}{(x+1)^2} = k \qquad (*) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{3}{x+1} = \frac{3}{(x+1)^2}.(x+1) - 2k - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}(2k+3)$$

Khi đó, phương trình (*) có dạng:

$$\frac{1}{12}(2k+3)^2 = k \Leftrightarrow 4k^2 - 2k + 9 = 0, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, qua M không kẻ được đường thẳng nào tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lời giải tự luận 3:* Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) tại A có dạng:

$$(d): y = y'_{(x_0)}(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = \frac{3}{(x_0+1)^2}.(x - x_0) + \frac{2x_0 - 1}{x_0 + 1}.$$

Điểm $M \in (d)$, ta được:

$$-1 = \frac{3}{(x_0+1)^2}.(1 - x_0) + \frac{2x_0 - 1}{x_0 + 1} \Leftrightarrow 3x_0^2 = -3, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, qua M không kẻ được đường thẳng nào tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Phác thảo qua đồ thị của hàm số (học sinh tự thực hiện) và nhận thấy rằng điểm M thuộc miền trong của đồ thị hàm số nên qua M không kẻ được tiếp tuyến tới đồ thị hàm số.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận 1, 2, 3* chúng ta thực hiện theo hai phương pháp đã biết. Tuy nhiên, các em học sinh cần đặc biệt lưu ý tới phép biến đổi đại số cho hệ điều kiện được sử dụng trong cách 2, bởi đó là cách biến đổi rất hiệu quả, nhất là đối với những bài toán chứa tham số.

▪ *Với cách lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá,* chúng ta sử dụng kết quả trong chú ý của (**Bài 46**).

Bài 48. Cho hàm số (C): $y = \dfrac{3x+2}{x+4}$. Số đường thẳng đi qua điểm M(1; 1) và tiếp xúc với đồ thị hàm số (C) bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đường thẳng đi qua M có phương trình:

(d): $y = k(x - 1) + 1$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \dfrac{3x+2}{x+4} = k(x-1)+1 \\ \dfrac{10}{(x+4)^2} = k \end{cases} \Rightarrow \frac{3x+2}{x+4} = \frac{10}{(x+4)^2}.(x - 1) + 1$$

$\Leftrightarrow (3x + 2)(x + 4) = 10(x - 1) + (x + 4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy, qua M kẻ được một đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Đường thẳng đi qua M có phương trình:

(d): $y = k(x - 1) + 1$.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \dfrac{3x+2}{x+4} = k(x-1)+1 \\ \dfrac{10}{(x+4)^2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-\dfrac{10}{x+4} = k(x+4)-5k+1 \\ \dfrac{10}{(x+4)^2} = k \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{10}{x+4} = \frac{10}{(x+4)^2}.(x + 4) - 5k + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} = \frac{1}{20}(5k+2).$$

Khi đó, phương trình (*) có dạng:

$$\frac{1}{40}(5k+2)^2 = k \Leftrightarrow 25k^2 - 20k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}.$$

Vậy, qua M kẻ được một đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lời giải tự luận 3:* Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) tại A có dạng:

$$(d): y = y'_{(x_0)}(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = \frac{10}{(x_0+4)^2}.(x - x_0) + \frac{3x_0+2}{x_0+4}.$$

Điểm $M \in (d)$, ta được:

$$1 = \frac{10}{(x_0+4)^2}.(1 - x_0) + \frac{3x_0+2}{x_0+4} \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

Vậy, qua M kẻ được một đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Nhận thấy rằng điểm M thuộc đồ thị hàm số nên qua M kẻ được đúng một tiếp tuyến tới đồ thị hàm số.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 49. Cho hàm số (C): $y = \frac{1}{x-1}$. Số đường thẳng đi qua điểm M(0; 4) và tiếp xúc với đồ thị hàm số (C) bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đường thẳng đi qua M có phương trình: (d): y = kx + 4.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-1} = kx+4 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} = k \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{(x-1)^2}.x + 4$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = -x + 4(x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 10x + 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Vậy, qua M kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Đường thẳng đi qua M có phương trình: (d): y = kx + 4.

(d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-1} = kx+4 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-1} = k(x-1)+k+4 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} = k \qquad (*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{(x-1)^2}.(x-1) + k + 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}(k+4)$$

Khi đó, phương trình (*) có dạng:

$$-\frac{1}{4}(k+4)^2 = k \Leftrightarrow k^2 + 12k + 16 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = -6 \pm \sqrt{20}.$$

Vậy, qua M kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lời giải tự luận 3:* Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến (d) tại A có dạng:

$$(d): y = y'_{(x_0)}(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (d): y = \frac{1}{(x_0-1)^2}.(x - x_0) + \frac{1}{x_0-1}.$$

Điểm $M \in (d)$, ta được:

$$4 = -\frac{1}{(x_0-1)^2}.x_0 + \frac{1}{x_0-1} \Leftrightarrow 4x_0^2 - 10x_0 + 5 = 0 \Leftrightarrow x_0^{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Vậy, qua M kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Phác thảo qua đồ thị của hàm số (học sinh tự thực hiện) và nhận thấy rằng điểm M thuộc miền ngoài của đồ thị hàm số nên qua M kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị hàm số.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 50. Cho hàm số (C): $y = \frac{x+2}{x-2}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm A(-6; 5) có dạng:

A. $y = -x - 1$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

B. $y = -x - 1$ và $y = x + 11$.

C. $y = -2x - 7$ và $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

D. $y = -2x - 7$ và $y = x + 11$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Phương trình tiếp tuyến đi qua A(-6; 5) có dạng:

(d): $y = k(x + 6) + 5$. (1)

Đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} 1+\frac{4}{x-2} = k(x+6)+5 \\ -\frac{4}{(x-2)^2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\frac{4}{x-2} = k(x-2)+8k+5 \\ -\frac{4}{(x-2)^2} = k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\frac{4}{x-2} = -\frac{4}{x-2}+8k+5 \\ -\frac{4}{(x-2)^2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x-2} = 2k+1 \\ -(2k+1)^2 = k \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=-1/4 \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với $k_1 = -1$ thay vào (1) được tiếp tuyến (d_1): $y = -x - 1$.
- Với $k_2 = -\frac{1}{4}$ thay vào (1) được tiếp tuyến (d_2): $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

Vậy, qua A kẻ được hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tiếp xúc với đồ thị.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Phương trình tiếp tuyến đi qua A(-6; 5) có dạng:

(d): $y = k(x + 6) + 5$. (*)

Đường thẳng (d) tiếp xúc với đồ thị hàm số khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x-2} = k(x+6)+5 \\ -\frac{4}{(x-2)^2} = k \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{x-2} = -\frac{4}{(x-2)^2}.(x+6)+5$$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) = -4(x + 6) + 5(x - 2)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 6$.

Khi đó:

- Với $x = 0$, ta được $k = -1$ và thay vào (1) được tiếp tuyến (d_1): $y = -x - 1$.
- Với $x = 6$, ta được $k = -\frac{1}{4}$ và thay vào (1) được tiếp tuyến (d_2): $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

Vậy, qua A kẻ được hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tiếp xúc với đồ thị.

➢ ***Lời giải tự luận 3:*** Giả sử tiếp điểm là $M(x_0, y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$(d): y = y'_{(x_0)}(x - x_0) + y_0$$

$$\Leftrightarrow (d): y = \frac{-4}{(x_0 - 2)^2}.(x - x_0) + \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2}. \qquad (2)$$

Điểm $A \in (d)$, ta được:

$$5 = \frac{-4}{(x_0 - 2)^2}.(-6 - x_0) + \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2} \Leftrightarrow x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 6 \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với $x_0 = 0$ thay vào (2) ta được tiếp tuyến (d_1): $y = -x - 1$.
- Với $x_0 = 6$ thay vào (2) ta được tiếp tuyến (d_2): $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

Vậy, qua A kẻ được hai tiếp tuyến (d_1), (d_2) tiếp xúc với đồ thị.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

- Với đường thẳng $y = -x - 1$ cho trong lựa chọn A (nó đi qua điểm A(-6; 5)), ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x + 2}{x - 2} = -x - 1 \Rightarrow x^2 = 0 \text{ có nghiệm kép.}$$

Tức là, đường thẳng $y = -x - 1$ là một tiếp tuyến thoả mãn, suy ra các đáp án C và D bị loại.

- Với đường thẳng $y = x + 11$ cho trong lựa chọn B (nó đi qua điểm A(-6; 5)), ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x + 2}{x - 2} = x + 11 \Rightarrow x^2 - 8x + 24 = 0 \text{ không có nghiệm kép.}$$

Tức là, đường thẳng $y = x + 11$ không là tiếp tuyến, suy ra đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận*: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Đạo hàm: $y' = -\frac{4}{(x-2)^2} < 0$, với mọi x.

Tức là, mọi tiếp tuyến của (C) đều có hệ số góc nhỏ hơn 0, suy ra các đáp án B và D bị loại.

▪ Với đường thẳng y = -x - 1 cho trong lựa chọn A (nó đi qua điểm A), ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x+2}{x-2} = -x - 1 \Rightarrow x^2 = 0 \text{ có nghiệm kép.}$$

Tức là, đường thẳng y = -x - 1 là một tiếp tuyến thoả mãn, suy ra đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

PHẦN II HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

§1 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hàm số mũ

Định nghĩa 1: Hàm số mũ cơ số a ($0 < a \neq 1$) *là hàm số xác định bởi công thức:*

$y = a^x$.

Đạo hàm của hàm số mũ: Ta ghi nhận các kết quả sau:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

b. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $(e^x)' = e^x$ và $(a^x) = a^x.\ln a$.

c. Nếu $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm trên J thì với mọi $x \in J$, ta có $(e^u)' = u'.e^u$ và $(a^u) = u'.a^u.\ln a$.

Xét hàm số $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, ta có các tính chất sau:

1. Liên tục trên $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên: Hàm số đơn điệu với mọi x.

- Với $a > 1$ thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$, tức là hàm số đồng biến.
- Với $0 < a < 1$ thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$, tức là hàm số nghịch biến.

3. Đồ thị của hàm số có 2 dạng và:

- Luôn cắt trục Oy tại A(0; 1).
- Nằm ở phía trên trục hoành.
- Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

2. Hàm số Logarit

Định nghĩa 2: Hàm số logarit cơ số a ($0 < a \neq 1$) *là hàm số xác định bởi công thức:*

$y = \log_a x$.

Đạo hàm của hàm số mũ: Ta ghi nhận các kết quả sau:

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

b. Với mọi $x \in (0; +\infty)$, ta có: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ và $(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a}$

c. Nếu $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm trên J thì với mọi $x \in J$, ta có:

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ và $(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a}$.

Xét hàm số $y = \log_a x$, với $0 < a \neq 1$, ta có các tính chất sau:

1. Hàm số liên tục trên $D = (0, +\infty)$ và tập giá trị $I = \mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên: Hàm số đơn điệu với mọi x.

- Với $a > 1$ thì $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$, tức là hàm số đồng biến.
- Với $0 < a < 1$ thì $\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, tức là hàm số nghịch biến.

3. Đồ thị của hàm số có 2 dạng và:

- Luôn cắt trục Oy tại A(1; 0).
- Nằm ở bên phải trục tung.
- Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

3. Hàm số lũy thừa

Định nghĩa 3: Hàm số lũy thừa là hàm số xác định bởi công thức $y = x^a$, *với* a *là hằng số tùy ý.*

Đạo hàm của hàm số mũ: Ta ghi nhận các kết quả sau:

a. Hàm số $y = x^a$ có có đạo hàm tại mọi điểm $x > 0$ và: $(x^a)' = a.x^{a-1}$.

b. Nếu $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm và $u(x) > 0$ trên J thì:

$(u^a)' = a.u'.u^{a-1}$, với mọi $x \in J$.

Chú ý:

1. Với n là số nguyên tùy ý, ta có $(x^n)' = n.x^{n-1}$ với mọi $x \neq 0$; và nếu $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm và $u(x) \neq 0$ trên J thì $(u^n)' = n.u'.u^{n-1}$, với mọi $x \in J$.

2. Ta có: $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, với mọi $x > 0$ nếu n chẵn, với mọi $x \neq 0$ nếu n lẻ.

3. Nếu $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm trên J và thỏa mãn điều kiện $u(x) > 0$ với mọi x thuộc J khi n chẵn, $u(x) \neq 0$ với mọi x thuộc J khi n lẻ thì:

$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$.



II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Cho hàm số $y = (x - 1)^{x+1}$. Tập xác định của hàm số là:

A. $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. B. $(1; +\infty)\backslash\{2\}$. C. $[1; +\infty)\backslash\{2\}$. D. $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Điều kiện là: $0 < x - 1 \neq 1 \Leftrightarrow 1 < x \neq 2$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $(1; +\infty)\backslash\{2\}$.

Bài 2. Cho hàm số $y = \ln(x^2 - x + 1)$. Tập xác định của hàm số là:

A. $\mathbb{R}$. B. $[0; +\infty)$. C. $[1; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Điều kiện là: $x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, luôn đúng.

Vậy, tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Xuất phát từ đáp án B, ta thay $x = 0$ vào hàm số được:

  $y = \ln 1 = 0$, tức là hàm số xác định tại $x = 0$.

Do đó, các đáp án C và D bị loại. Tới đây ta chỉ còn phải lựa chọn A và B.

- Lấy một điểm thuộc A nhưng không thuộc B, cụ thể $x = -1$, ta được:

  $y = \ln(1 + 1 + 1) = \ln 3$, tức là hàm số xác định tại $x = -1$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử với máy tính* CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Nhập hàm số $y = \ln(x^2 - x + 1)$ ta ấn:

ln (ALPHA X x^2 – ALPHA X + 1)

- Khi đó, ta lần lượt với các giá trị $x = 0$, $x = -1$ bằng cách ấn:

CALC 0 = → 0

CALC –1 = → 1.098

$\Rightarrow$ hàm số xác định tại $x = 0$ và $x = -1$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận,* chúng ta thiết lập điều kiện có nghĩa cho biểu thức trong hàm logarit. Và ở đó, việc giải một bất phương trình bậc hai được thực hiện bằng phép đánh giá.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* chúng ta định hướng từ nội dung bốn đáp án A, B, C, D, cụ thể ta chọn xuất phát điểm là x = 0 hoặc x = 1.

Khi chọn x = 0 để thay vào hàm số, ta có:

- Nếu x = 0 thuộc tập xác định thì các đáp án C và D bị loại, do đó chỉ còn phải lựa chọn giữa A và B. Tới đây, chúng ta thử tiếp một phần tử x_0 thuộc A\B (cụ thể ta chọn $x_0 = -1$). Khi đó, nếu x_0 thuộc tập xác định thì đáp án A là đúng, trái lại đáp án B là đúng.

- Nếu x = 0 không thuộc tập xác định thì các đáp án A và B bị loại, do đó chỉ còn phải lựa chọn giữa C và D. Tới đây, chúng ta thử tiếp với $x_0 = 1$. Nếu 1 thuộc tập xác định thì đáp án C là đúng, trái lại đáp án D là đúng.

▪ *Cách lựa chọn đáp án bằng phép thử với máy tính CASIO fx-570MS* sẽ giúp chúng ta giảm thiểu được thời giam tính toán. Các em học sinh cần lưu ý cách khai báo hàm số lôgarit.

Bài 3. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-e}{x}$ bằng:

A. -3e. B. -e. C. e. D. 3e.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-e}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e(e^x-1)}{x} = e.\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = e,$$ ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: bằng cách thực hiện theo thứ tự:

▪ Nhập $\frac{e^{x+1}-e}{x}$ ta ấn:

(ALPHA e ^ (ALPHA X + 1) − ALPHA e)
÷ ALPHA X

▪ Khi đó, ta lần lượt với các giá trị x = 1 và x = $\frac{1}{8}$ bằng cách ấn:

CALC 1 =	4.6707
CALC 1 $a^{b/c}$ 8 =	2.8954

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận*, chúng ta cần sử dụng phép biến đổi đại số (đặt nhân tử chung) để làm xuất hiện giới hạn cơ bản của hàm số mũ.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* sử dụng máy tính CASIO fx-570MS, chúng ta thực hiện phép dự đoán giá trị giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ bằng cách thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Nhập hàm số f(x) vào máy tính.

Bước 2: Sử dụng hàm CALC để tính:

- Giá trị của $f(x_0)$ nếu hàm số xác định tại điểm x_0.

- Các giá trị của f(x) với cho x xung quanh giá trị của x_0 nếu hàm số không xác định tại điểm x_0.

Bài 4. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta biến đổi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1 - e^{2x} + 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3(e^{3x} - 1)}{3x} - \lim_{x \to 0} \frac{2(e^{2x} - 1)}{2x} = 3 - 2 = 1.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: *Học sinh tự thực hiện tương tự **Bài 3**.*

Bài 5. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta biến đổi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} . \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2(e^{2x} - 1)}{2x} . \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 2.1 = 2.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: *Học sinh tự thực hiện tương tự **Bài 3**.*

Bài 6. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{3x}$ bằng:

A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{3x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}=\frac{2}{3}.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: *Học sinh tự thực hiện tương tự **Bài 3**.*

Bài 7. Giới hạn $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+x)}$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.\frac{x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1.1=1.$$

Bài 8. Giới hạn $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$ bằng:

A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta biến đổi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}.\frac{x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln(1+3x)}{3x}.\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2\sin 2x}=\frac{3}{2}.$$

Bài 9. Cho hàm số $f(x) = (x - 1)\ln^2 x$. Ta có $f'(1)$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $f'(x) = [(x - 1)\ln^2 x]' = \ln^2 x + \frac{(x-1)\ln x}{x}$

$$\Rightarrow f'(1) = \ln^2 1 + \frac{(1-1)\ln 1}{1} = 0.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

SHIFT d/dx (ALPHA X – 1) × (ln ALPHA X) x² , 1) = **0**

Vậy, ta được $f'(1) = 0$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận,* chúng ta thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số.

Bước 2: Tính giá trị của đạo hàm tại điểm x_0.

▪ *Trong cách giải bằng máy tính* CASIO fx-570MS, chúng ta thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Thiết lập môi trường cho máy tính (thường có thể bỏ qua).

Bước 2: Khai báo hàm số và điểm cần tính đạo hàm.

Bài 10. Cho hàm số $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Ta có f'(ln2) bằng:

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{4}{9}$. C. $\frac{9}{16}$. D. $\frac{16}{25}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \Rightarrow f'(\ln 2) = \frac{2e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}+1)^2} = \frac{4}{9}.$$

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính*** CASIO fx – 570MS, bằng cách ấn:

SHIFT d/dx (ALPHA e ^ ALPHA X − 1)
÷ (ALPHA e ^ ALPHA X + 1) , ln 2)
= 0.3333
$a^{b/c}$ 4⌟9

Vậy, ta được $f'(\ln 2) = \frac{4}{9}$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 11. Đạo hàm của hàm số y = x.lnx bằng:

A. lnx. B. lnx + 1. C. lnx + 2. D. lnx + x.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $y' = \ln x + x.\frac{1}{x} = \ln x + 1$.

Bài 12. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\ln(x+1)}{x}$ bằng:

A. $\frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$. B. $\frac{1}{x(x+1)}$.

C. $-\frac{\ln(x+1)}{x^2}$. D. $\frac{\ln(x+1)}{x}$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có: $y' = \dfrac{\dfrac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \dfrac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận*: Viết lại hàm số dưới dạng:

$y = \frac{1}{x}.\ln(x+1)$

Ta lần lượt đánh giá với dạng hàm số y = uv:

- Đáp án D bị loại bởi với dạng hàm này không thể có y' = y.
- Đáp án C bị loại bởi nó là dạng u'.v.
- Đáp án B bị loại bởi nó là dạng v'.u.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Với hàm số dạng $y = \frac{u}{v}$ ta luôn có đạo hàm với mẫu số bình phương (cụ thể $y' = \frac{w}{v^2}$) thì chúng ta loại trừ ngay được các đáp án B và D.
- Với hàm số dạng y = uv thì chúng ta loại trừ ngay được đáp án C bởi nó là dạng u'.v.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 13. Hàm số nào sau đây là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \log_{\frac{2}{e}}(x+1)$ B. $y = \log_{\frac{e}{2}}(x^2+1)$

C. $y = \log_{\frac{e}{2}}(x+1)$ D. $y = \log_{\frac{2}{e}}(x^2+1)$

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta lần lượt:

- Với hàm số $y = \log_{\frac{2}{e}}(x+1)$ xác định trên D = (-1; +∞) nên không thoả mãn, do đó đáp án A bị loại.
- Với hàm số $y = \log_{\frac{e}{2}}(x^2+1)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có:

$a = \frac{e}{2} > 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó, đáp án B là đúng, tới đây chúng ta dừng lại.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt đánh giá:

- Trước tiên, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì phải xác định trên $\mathbb{R}$. Do đó, các đáp án A và C bị loại. Tới đây ta chỉ còn phải lựa chọn B và D.
- Vì hàm số cho trong B có $a = \frac{e}{2} > 1$, suy ra thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Trước tiên, hàm số $y = \log_a f(x)$ đồng biến khi $a > 1$. Do đó, các đáp án A và D bị loại. Tới đây ta chỉ còn phải lựa chọn B và C.

▪ Vì hàm số cho trong C không xác định trên $\mathbb{R}$, suy ra đáp án C không thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận,* chúng ta lần lượt thử cho các hàm số bằng việc thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Chỉ ra tập xác định của hàm số.

Bước 2: Đánh giá cơ số a để xét tính đồng biến của nó trên R.

Tới hàm số trong B, chúng ta thấy thỏa mãn nên dừng lại ở đó. Trong trường hợp trái lại chúng ta sẽ tiếp tục với C.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1,* chúng ta loại trừ dần bằng việc thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Sử dụng điều kiện cần để hàm số đơn điệu trên D là phải xác định trên D, chúng ta loại bỏ được các đáp án A và C bởi các hàm số này đều không xác định trên R.

Bước 2: Đánh giá cơ số, để loại bỏ được đáp án D.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 2,* chúng ta làm ngược lại so với phép thử 1.

Bài 14. Hàm số $y = x.e^x$ đồng biến trên các khoảng:

A. $(-\infty; 1]$.
B. $[-1; +\infty)$.
C. $[-1; 1]$.
D. $(-\infty; -1]$ và $[1; +\infty)$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta lần lượt có:

▪ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

▪ Đạo hàm: $y' = e^x + x.e^x = (1 + x)e^x$.

▪ Hàm số đồng biến khi: $y' \geq 0 \Leftrightarrow (1 + x)e^x \geq 0 \Leftrightarrow 1 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Vậy, hàm số đồng biến trên khoảng $[-1; +\infty)$.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

$$y(2) = 2e^2 \text{ và } y(1) = e \Rightarrow y(2) > y(1)$$

$\Rightarrow$ trên đoạn [1; 2] hàm số đồng biến $\Rightarrow$ Các đáp án A và C bị loại.

$y(0) = 0 \Rightarrow y(0) < y(1)$

$\Rightarrow$ trên đoạn [0; 1] hàm số đồng biến.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 15. Cho hàm số $y = x - 2\ln x$. Hàm số có:

A. Một cực đại và một cực tiểu. B. Một cực đại.

C. Một cực tiểu. D. Không có cực trị.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta lần lượt có:

- Miền xác định $D = (0; +\infty)$.
- Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{2}{x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'			-	0	+	
y		$+\infty$	↘	$2 - 2\ln 2$	↗	$+\infty$

Vậy, hàm số có một cực tiểu.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta lần lượt có:

- Miền xác định $D = (0; +\infty)$.
- Đạo hàm: $y' = 1 - \frac{2}{x}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$y'' = \frac{2}{x^2} \Rightarrow y''(2) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Vậy, hàm số có một cực tiểu.

Bài tập tương tự: Cho hàm số $y = xe^{-3x}$. *Hàm số có:*

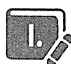
A. Một cực đại và một cực tiểu. B. Một cực đại.

C. Một cực tiểu. D. Không có cực trị.

Đáp số trắc nghiệm B.

Đề nghị học sinh thực hiện theo 2 cách như trong **Bài 15.**

§2 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

 KIẾN THỨC CƠ BẢN

Lược đồ để giải tự luận các phương trình mũ và logarit có thể được minh hoạ sơ bộ theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Bước 2: Lựa chọn phương pháp thực hiện:

Phương pháp 1: Biến đổi tương đương.

Phương pháp 2: Logarit hoá và đưa về cùng cơ số.

Phương pháp 3: Đặt ẩn phụ, có 4 dạng đặt ẩn phụ:

a. Sử dụng 1 ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành một phương trình với một ẩn phụ.

b. Sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành 1 phương trình với một ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

c. Sử dụng k ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành hệ phương trình với k ẩn phụ.

d. Sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành hệ phương trình với 1 ẩn phụ và 1 ẩn x.

Phương pháp 4: Hàm số, bao gồm:

a. Sử dụng tính liên tục của hàm số.

b. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

c. Sử dụng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

d. Sử dụng định lý Lagrange.

e. Sử dụng định lý Rôn.

Phương pháp 5: Đồ thị.

Phương pháp 6: Điều kiện cần và đủ.

Phương pháp 7: Đánh giá.

Chú ý:

1. Trong trường hợp sử dụng phương pháp biến đổi tương đương, chúng ta có thể bỏ qua bước 1 để giảm thiểu độ phức tạp.

2. Nếu lựa chọn phương pháp đặt ẩn phụ thì:

a. Với phương trình không chứa tham số có thể chỉ cần thiết lập điều kiện hẹp cho ẩn phụ.

b. Với phương trình chứa tham số phải đi tìm *điều kiện đúng* cho ẩn phụ.

Thí dụ nếu đặt $t = 2^{x^2}$ thì:

a. Với phương trình không chứa tham số có thể chỉ cần điều kiện $t > 0$.

b. Với phương trình chứa tham số phải cần điều kiện $t \geq 1$.

Tuy nhiên, trong mọi trường hợp, lời khuyên cho các em học sinh là hãy chỉ ra điều kiện đúng cho ẩn phụ.

 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Nếu $\ln(\ln x) = 1$ thì x bằng:

A. $\frac{1}{e}$. B. e^e. C. $e^{\frac{1}{e}}$. D. e.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Biến đổi tương đương phương trình về dạng: $\ln x = e \Leftrightarrow x = e^e$.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = e^e$.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

- Với $x = \frac{1}{e}$ thay vào phương trình ta thấy:

$$\ln\left(\ln\frac{1}{e}\right) = 1 \Leftrightarrow \ln(-1) = 1,$$ mâu thuẫn ⇒ Đáp án A bị loại.

- Với $x = e^e$ thay vào phương trình, ta thấy: $\ln(\ln e^e) = 1 \Leftrightarrow \ln e = 1$, thoả mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính*** CASIO fx – 570MS: bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Nhập ln(lnx) ta ấn:

[ln] [(] [ln] [ALPHA] [X] [)]

- Khi đó, ta lần lượt với các giá trị $x = \frac{1}{e}$ và $x = e^e$:

[CALC] 1 [a b/c] [ALPHA] [e] [=] → ERROR

Suy ra, đáp án A bị loại.

[CALC] [ALPHA] [e] [^] [ALPHA] [e] [=] → 1

Suy ra, giá trị $x = e^e$ thoả mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận*, chúng ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương để giải, cụ thể:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}.$$

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử*, chúng ta lần lượt với các giá trị từ trái qua phải để xem nó có phải là nghiệm của phương trình hay không?

▪ *Cách lựa chọn đáp án bằng phép thử với máy tính* CASIO fx-570MS sẽ giúp chúng ta giảm thiểu được thời gian tính toán.

Bài 2. Phương trình $2^{x^2-3x+2} = 1$ có tập nghiệm là:

A. {2; 3}. B. {1; 2}. C. {-6; -1}. D. {6; 1}.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Biến đổi phương trình về dạng:

$2^{x^2-3x+2} = 2^0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {1; 2}.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = 2 thay vào phương trình ta thấy:

$2^{4-6+2} = 1 \Leftrightarrow 2^0 = 1$, đúng $\Rightarrow$ Các đáp án C và D bị loại.

▪ Với x = 3 thay vào phương trình ta thấy:

$2^{9-9+2} = 1 \Leftrightarrow 4 = 1$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = 1 thay vào phương trình ta thấy:

$2^{1-3+2} = 1 \Leftrightarrow 2^0 = 1$, đúng $\Rightarrow$ Các đáp án A và C bị loại.

▪ Với x = 6 thay vào phương trình ta thấy:

$2^{36-18+2} = 1 \Leftrightarrow 2^{20} = 1$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: bằng cách thực hiện theo thứ tự:

▪ Nhập 2^{x^2-5x+6} ta ấn:

2 [^] [(] [ALPHA] [X] [x²] [–] 3 [ALPHA] [X] [+] 2 [)]

▪ Khi đó, ta lần lượt với các giá trị x = 2, x = 3:

[CALC] 2 [=] → 1

⇒ Các đáp án C và D bị loại.

[CALC] 3 [=] → 4

⇒ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận*, chúng ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương để giải, cụ thể:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right. \text{ hoặc } \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x)-g(x)] = 0 \end{cases}$$

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1,* chúng ta lựa chọn việc bắt đầu với x = 2 bởi đó là giá trị chỉ có trong A và B. Và ở đây, vì giá trị x = 2 thoả mãn nên chúng ta khẳng định các đáp án C và D sai. Tiếp theo, chúng ta tiến hành thử với x = 3 và vì nó không thỏa mãn nên suy ra đáp án A là sai. Từ đó, khẳng định việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 3. Phương trình $(3 - 2\sqrt{2})^{3x} = 3 + 2\sqrt{2}$ có tập nghiệm là:

A. T = {1}. **B.** $T = \left\{\frac{1}{3}\right\}$. **C.** $T = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$. **D.** T = {-1}.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Biến đổi phương trình về dạng:

$$(3 - 2\sqrt{2})^{3x} = \frac{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{3-2\sqrt{2}} = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = (3 - 2\sqrt{2})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là $T = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = 1 thay vào phương trình ta thấy:

$(3 - 2\sqrt{2})^3 = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 24\sqrt{2} = 0$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

▪ Với $x = \frac{1}{3}$ thay vào phương trình ta thấy:

$(3 - 2\sqrt{2})^1 = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{2} = 0$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

▪ Với $x = -\frac{1}{3}$ thay vào phương trình ta thấy:

$(3 - 2\sqrt{2})^{-1} = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})$, thoả mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = -1 thay vào phương trình ta thấy:

$(3 - 2\sqrt{2})^{-3} = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 17 - 12\sqrt{2} = 0$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

▪ Với $x = -\frac{1}{3}$ thay vào phương trình ta thấy:

$(3 - 2\sqrt{2})^{-1} = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})$, thoả mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

▪ Nhập $(3 - 2\sqrt{2})^{3x} - 3 - 2\sqrt{2}$ ta ấn:

(3 − 2 √ 2) ^ (3 ALPHA X) − 3 − 2 √ 2

▪ Khi đó, ta lần lượt với các giá trị $x = 1$, $x = \frac{1}{3}$ và $x = -\frac{1}{3}$:

CALC 1 =   −33.9411

Suy ra, đáp án A bị loại.

CALC 1 $a^{b/c}$ 3 =   −5.6568

Suy ra, đáp án B bị loại.

CALC (−) 1 $a^{b/c}$ 3 =   0

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 4. Phương trình $3^x.2^{x+1} = 72$ có tập nghiệm là:

A. T = {0}.   **B.** T = {1}.   **C.** T = {2}.   **D.** T = {3}.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Biến đổi phương trình về dạng:

$3^x.2.2^x = 72 \Leftrightarrow 2.(3.2)^x = 72 \Leftrightarrow 6^x = 36 = 6^2 \Leftrightarrow x = 2.$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {2}.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với x = 0, thay vào phương trình ta thấy:

  $3^0.2^1 = 72 \Leftrightarrow 2 = 72$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với x = 1, thay vào phương trình ta thấy:

  $3.2^2 = 72 \Leftrightarrow 12 = 72$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

- Với x = 2, thay vào phương trình ta thấy: $3^2.2^3 = 72 \Leftrightarrow 72 = 72$, thoả mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với x = 3 thay vào phương trình ta thấy:

  $3^3.2^4 = 72 \Leftrightarrow 128 = 72$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

- Với x = 2 thay vào phương trình ta thấy: $3^2.2^3 = 72 \Leftrightarrow 72 = 72$, thoả mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Nhập $3^x.2^{x+1}$ ta ấn:

3 [^] [ALPHA] [X] [×] 2 [^] [(] [ALPHA] [X] [+] 1 [)]

- Khi đó, ta lần lượt với các giá trị x = 0, x = 1 và x = 2:

[CALC] 0 [=] | 2

Suy ra, đáp án A bị loại.

[CALC] 1 [=] | 12

Suy ra, đáp án B bị loại.

[CALC] 2 [=] | 72

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 5. Phương trình $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 9.5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$ có tập nghiệm là:

A. T = {1}. **B.** T = {0}. **C.** T = {-1}. **D.** T = {-2}.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Biến đổi phương trình về dạng:

$$3.3^x + 9.3^x + 27.3^x = 9.5^x + 5.5^x + 25.5^x \Leftrightarrow 39.3^x = 39.5^x \Leftrightarrow 3^x = 5^x \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {0}.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với x = 1 thay vào phương trình ta thấy:

$$9 + 27 + 729 = 45 + 25 + 125 \Leftrightarrow 765 = 195,$$ mâu thuẫn

⇒ Đáp án A bị loại.

- Với x = 0 thay vào phương trình ta thấy:

$$3 + 9 + 27 = 9 + 5 + 25 \Leftrightarrow 39 = 39,$$ thoả mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái) - *Học sinh tự thực hiện.*

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS - *Học sinh tự thực hiện.*

Bài 6. Phương trình $0,125.4^{2x-3} = (4\sqrt{2})^x$ có tập nghiệm là:

A. T = {0}. B. T = {2}. C. T = {4}. D. T = {6}.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Vì $0,125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ nên ta biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{-3}.2^{2(2x-3)} = (2^2.2^{\frac{1}{2}})^x \Leftrightarrow 2^{4x-9} = 2^{\frac{5x}{2}} \Leftrightarrow 4x - 9 = \frac{5x}{2} \Leftrightarrow 3x = 18 \Leftrightarrow x = 6.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {6}.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với x = 0 thay vào phương trình ta thấy:

$$0,125.4^{-3} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8}.\frac{1}{64} = 1,$$ mâu thuẫn ⇒ Đáp án A bị loại.

- Với x = 2 thay vào phương trình ta thấy:

$$0,125.4 = (4\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \frac{1}{8}.4 = 32,$$ mâu thuẫn ⇒ Đáp án B bị loại.

- Với x = 4 thay vào phương trình ta thấy:

$$0,125.4^5 = (4\sqrt{2})^4 \Leftrightarrow \frac{1}{8}.1024 = 1024,$$ mâu thuẫn ⇒ Đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = 6 thay vào phương trình ta thấy:

$0,125.4^9 = (4\sqrt{2})^6 \Leftrightarrow \frac{1}{8}.4^9 = 2^{15}$, thoả mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS - Bạn đọc tự thực hiện.

Bài 7. Phương trình $(x + 1)^{x+1} = (x + 1)^{3-x}$ có tập nghiệm là:

A. T = {0; 1}. **B.** T = {0; 2}. **C.** T = {1; 2}. **D.** T = {3}.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Biến đổi phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{l} x+1=1 \\ \begin{cases} 0<x+1\neq 1 \\ x+1=3-x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} -1<x\neq 0 \\ x=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {0; 1}.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ (x+1-1)[(x+1)-(3-x)]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x(2x-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {0; 1}.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = 0 thay vào phương trình ta thấy:

$1^1 = 1^3 \Leftrightarrow 1 = 1$, đúng $\Rightarrow$ Các đáp án C và D bị loại.

▪ Với x = 1 thay vào phương trình ta thấy:

$2^2 = 2^2 \Leftrightarrow 4 = 4$, đúng $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = 3 thay vào phương trình ta thấy:

$4^4 = 4^{-1}$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

▪ Với x = 2 thay vào phương trình ta thấy:

$3^3 = 3^1$, mâu thuẫn ⇒ Các đáp án C và B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: bằng cách thực hiện theo thứ tự:

▪ Nhập 2^{x^2-5x+6} ta ấn:

(ALPHA X + 1) ^ (ALPHA X + 1) –
(ALPHA X + 1) ^ (3 – ALPHA X)

▪ Khi đó, ta lần lượt với các giá trị x = 0, x = 1:

CALC 0 = → 0

⇒ x = 0 là nghiệm ⇒ Các đáp án C và D bị loại.

CALC 1 = → 0

⇒ x = 0 là nghiệm ⇒ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 8. Phương trình $2^{x^2-2x} = \frac{3}{2}$ có tập nghiệm là:

A. $T = \{1 - \sqrt{\log_3 2}; \sqrt{\log_3 2}\}$.

B. $T = \{- \sqrt{\log_3 2}; \sqrt{\log_3 2}\}$.

C. $T = \{1 - \sqrt{\log_3 2}; 1 + \sqrt{\log_3 2}\}$.

D. $T = \{1 - \sqrt{\log_2 3}; 1 + \sqrt{\log_2 3}\}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Lấy logarit cơ số 2 hai vế phương trình, ta được:

$$\log_2 2^{x^2-2x} = \log_2 \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x = \log_2 3 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - \log_2 3 = 0,$$

ta có Δ' = $\log_2 3 = \log_2 3 > 0$, suy ra phương trình có nghiệm $x = 1 \pm \sqrt{\log_2 3}$.

Vậy, phương trình có tập nghiệm là $T = \{1 - \sqrt{\log_2 3}; 1 + \sqrt{\log_2 3}\}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Ta có:

▪ Trước tiên, vì $\log_3 2 < 0$ nên $\sqrt{\log_3 2}$ không có nghĩa, do đó các đáp án A và C bị loại.

▪ Ta thực hiện:

+ Nhập 2^{x^2-2x} ta ấn:

2 ^ (ALPHA X x^2 – 2 ALPHA X)

+ Khi đó, ta thử với giá trị $x = \sqrt{\log_2 3}$

CALC √ (ln 3 $a^{b/c}$ ln 2) = 0.5155

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận*, chúng ta sử dụng phương pháp logarit hoá để giải, cụ thể:

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$$

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* chúng ta:

- Trước tiên, loại được các lựa chọn A và C bởi vi phạm điều kiện có nghĩa của căn bậc hai.

- Để thực hiện phép thử cho $x = \sqrt{\log_2 3}$ ta biến đổi nó về dạng $x = \sqrt{\frac{\ln 3}{\ln 2}}$ để phù hợp với các hàm trong máy tính.

Bài 9. Phương trình $\log_2(6x^2 - 5x + 3) = 1$ có tập nghiệm là:

A. $T = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. B. $T = \left\{\frac{1}{3}\right\}$. C. $T = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$. D. T = Æ.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Biến đổi phương trình về dạng:

$$6x^2 - 5x + 3 = 2 \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = \frac{1}{3}$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là $T = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$.

Chú ý: Việc sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS để giải phương trình bậc hai ở trên được thực hiện bằng cách ấn:

MODE MODE MODE 1 ▶ 2

6 = (−) 5 = 1 = 0.5

▼ 0.3333

$a^{b/c}$ 1⌟3

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $x = \frac{1}{2}$ thay vào phương trình ta thấy:

$$\log_2\left(6.\frac{1}{4} - 5.\frac{1}{2} + 3\right) = 1 \Leftrightarrow \log_2 2 = 1, \text{ đúng} \Rightarrow \text{Các đáp án B và D bị loại.}$$

▪ Với $x = \frac{1}{3}$ thay vào phương trình ta thấy:

$$\log_2\left(6.\frac{1}{9} - 5.\frac{1}{3} + 3\right) = 1 \Leftrightarrow \log_2 2 = 1, \text{ đúng} \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: bằng cách thực hiện theo thứ tự:

▪ Nhập $\log_2(6x^2 - 5x + 3)$ ta ấn:

(ln (6 ALPHA X x^2 – 5 ALPHA X + 3)) ÷ ln 2

▪ Khi đó, ta thử với các giá trị $x = \frac{1}{2}$ và $x = \frac{1}{3}$:

CALC 1 $a^{b/c}$ 2 = 　　　　1

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Các đáp án B và D bị loại.

CALC 1 $a^{b/c}$ 3 = 　　　　1

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}$ là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 10. Phương trình $\log_x(2x^2 - 4x + 3) = 2$ có tập nghiệm là:

A. $T = \{1\}$. 　　B. $T = \{2\}$. 　　C. $T = \{3\}$. 　　D. $T = \{1; 2; 3\}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Biến đổi phương trình về dạng:

$$\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 2x^2 - 4x + 3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là $T = \{3\}$.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì $x = 1$ vi phạm điều kiện cơ số của logarit nên các đáp án A và D bị loại.

▪ Với $x = 2$ thay vào phương trình ta thấy:

$$\log_2(8 - 8 + 3) = 2 \Leftrightarrow \log_2 3 = 2, \text{ mâu thuẫn} \Rightarrow \text{Đáp án B bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

▪ Nhập $\log_x(2x^2 - 4x + 3)$ ta ấn:

(ln (2 ALPHA X x² – 4 ALPHA X + 3)) ÷ ln ALPHA X

▪ Khi đó, ta thử với các giá trị x = 1 và x = 2:

CALC 1 = → ERROR

⇒ x = 1 không phải là nghiệm ⇒ Các đáp án A và D bị loại.

CALC 2 = → 1.5849

⇒ x = 2 không phải là nghiệm ⇒ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 11. Phương trình $\log_3(6x^3 - 7x + 1) = \log_3(x^2 - 3x + 2)$ có tập nghiệm là:

A. $T = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$. B. $T = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$. C. $T = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$. D. $T = \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ 6x^3 - 7x + 1 = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 1 \end{array}\right. \\ 6x^3 - x^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 1 \end{array}\right. \\ (x-1)(6x^2 + 5x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 1 \end{array}\right. \\ x = 1,\ x = -\frac{1}{2},\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}; x = -\frac{1}{3}$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là $T = \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép trích lược tự luận*: Ta cần có điều kiện tối thiểu:

$6x^3 - 7x + 1 > 0.$ (*)

▪ Với $x = \frac{1}{2}$, điều kiện (*) có dạng:

$6.\frac{1}{8} - 7.\frac{1}{2} + 1 > 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} > 0$, mâu thuẫn ⇒ Các đáp án A và B bị loại.

▪ Với $x = \frac{1}{3}$, điều kiện (*) có dạng:

$6.\frac{1}{27} - 7.\frac{1}{3} + 1 > 0 \Leftrightarrow -\frac{10}{9} > 0$, mâu thuẫn ⇒ Đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $x = \frac{1}{2}$ thay vào phương trình ta thấy:

$$\log_3\left(6.\frac{1}{8} - 7.\frac{1}{2} + 1\right) = \log_3\left(\frac{1}{4} - 3.\frac{1}{2} + 2\right) \Leftrightarrow \log_3\left(-\frac{7}{2}\right) = \log_3\frac{3}{4}, \text{ vi phạm}$$

$\Rightarrow$ Các đáp án A và B bị loại.

▪ Với $x = \frac{1}{3}$ thay vào phương trình ta thấy:

$$\log_3\left(6.\frac{1}{27} - 7.\frac{1}{3} + 1\right) = \log_3\left(\frac{1}{9} - 3.\frac{1}{3} + 2\right) \Leftrightarrow \log_3\left(-\frac{10}{9}\right) = \log_3\frac{10}{9}, \text{ vi phạm}$$

$\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $x = -\frac{1}{3}$ thay vào phương trình ta thấy:

$$\log_3\left(-6.\frac{1}{27} + 7.\frac{1}{3} + 1\right) = \log_3\left(\frac{1}{9} + 3.\frac{1}{3} + 2\right) \Leftrightarrow \log_3\frac{28}{9} = \log_3\frac{28}{9}, \text{ đúng}$$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Các đáp án A và C bị loại.

▪ Với $x = -\frac{1}{2}$ thay vào phương trình ta thấy:

$\log_3\left(-6.\frac{1}{8} + 7.\frac{1}{2} + 1\right) = \log_3\left(\frac{1}{4} + 3.\frac{1}{2} + 2\right) \Leftrightarrow \log_3\frac{15}{4} = \log_3\frac{15}{4}$, đúng $\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS* - Học sinh tự thực hiện.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận*, chúng ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương để giải, cụ thể: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép trích lược tự luận,* chúng ta sử dụng điều kiện có nghĩa của hàm số logarit kiểm tra các nghiệm.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1, 2* chúng ta lần lượt với các giá trị từ trái qua phải và từ phải qua trái cùng với lưu ý sự tồn tại của chúng trong các đáp án khác.

Bài 12. Phương trình $2\lg(2x) = \lg(x^2 + 27)$ có tập nghiệm là:

A. $T = \{1\}$.　　B. $T = \{1; 2\}$.　　C. $T = \{3\}$.　　D. $T = \{\pm 3\}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Điều kiện:

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ x^2 + 27 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0. \quad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\lg(2x)^2 = \lg(x^2 + 27) \Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + 27 \Leftrightarrow 3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 9 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = 3.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là $T = \{3\}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $x = 1$ thay vào phương trình ta thấy:

  $2\lg 2 = \lg 28 \Leftrightarrow 4 = 28$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Các đáp án A và B bị loại.

- Với $x = -3$ thay vào phương trình ta thấy:

  $2\lg(-6) = \lg 36$, vi phạm $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $x = 3$ thay vào phương trình ta thấy:

  $2\lg 6 = \lg 36 \Leftrightarrow 36 = 36$, đúng $\Rightarrow x = 3$ là nghiệm của phương trình

$\Rightarrow$ Các đáp án A và B bị loại.

- Với $x = -3$ thay vào phương trình ta thấy:

  $2\lg(-6) = \lg 36$, vi phạm $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Nhập $2\lg(2x) - \lg(x^2 + 27)$ ta ấn:

2 [log] [(] 2 [ALPHA] [X] [)] [−] [log] [(] [ALPHA] [X] [x^2] [+] 27 [)]

- Khi đó, ta thử với các giá trị $x = 1$ và $x = -3$:

[CALC] 1 [=]　　　　−0.8450

$\Rightarrow x = 1$ không phải là nghiệm $\Rightarrow$ Các đáp án A và B bị loại.

CALC (−) 3 = ERROR

$\Rightarrow$ x = -3 không phải là nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 13. Phương trình $\log_2(2^{x+1} - 5) = x$ có tập nghiệm là:

A. T = {0}. B. T = {1}. C. T = $\{\log_2 5\}$. D. T = {3}.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Biến đổi phương trình về dạng:

$\log_2(2^{x+1} - 5) = \log_2 2^x \Leftrightarrow 2.2^x - 5 = 2^x \Leftrightarrow 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5$.

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = $\{\log_2 5\}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với x = 0 thay vào phương trình ta thấy:

  $\log_2(2 - 5) = 0 \Leftrightarrow \log_2(-3) = 0$, vi phạm $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với x = 1 thay vào phương trình ta thấy:

  $\log_2(2^2 - 5) = 1 \Leftrightarrow \log_2(-1) = 1$, vi phạm $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

- Với x = 3 thay vào phương trình ta thấy:

  $\log_2(16 - 5) = 4 \Leftrightarrow \log_2 11 = 4$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với x = 3 thay vào phương trình ta thấy:

  $\log_2(16 - 5) = 4 \Leftrightarrow \log_2 11 = 4$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

- Với $x = \log_2 5$ thay vào phương trình ta thấy:

  $\log_2(2^{\log_2 5+1} - 5) = \log_2 5 \Leftrightarrow \log_2(2^{\log_2 10} - 5) = \log_2 5$

  $\Leftrightarrow \log_2(10 - 5) = \log_2 5$, đúng $\Rightarrow x = \log_2 5$ là nghiệm của phương trình.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS* - Học sinh tự thực hiện.

Bài 14. Phương trình $\log_{\sqrt{2}} x . \log_2 x . \log_4 x = 8$ có tập nghiệm là:

A. T = {2}. B. T = {1; 2}. C. T = {1; 4}. D. T = {4}.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Điều kiện x > 0.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\log_2 x.\log_2 x.\frac{1}{2}\log_2 x = 8 \Leftrightarrow \log_2^3 x = 8 \Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {4}.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = 4 thay vào phương trình ta thấy:

$\log_{\sqrt{2}} 4.\log_2 4.\log_4 4 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8$, đúng $\Rightarrow$ Các đáp án A và B bị loại.

▪ Với x = 1 thay vào phương trình ta thấy: 0 = 8, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS - *Học sinh tự giải.*

☞ Hoạt động: Các em học sinh hãy giải thích tại sao ta không lựa chọn thực hiện phép thử với x = 2.

Bài 15. Phương trình $\log_9[3\log_3(1 + \log_2 x)] = \frac{1}{2}$ có tập nghiệm là:

A. T = {1}. B. T = {4}. C. T = {1; 2}. D. T = {2; 4}.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\log_3(1 + \log_2 x)] = 3 \Leftrightarrow \log_3(1 + \log_2 x)] = 1 \Leftrightarrow 1 + \log_2 x = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {4}.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = 1 thay vào phương trình ta thấy:

$\log_9[3\log_3(1 + \log_2 1)] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_9 0 = \frac{1}{2}$, vi phạm điều kiện logarit

$\Rightarrow$ Các đáp án A và C bị loại.

▪ Với x = 2 thay vào phương trình ta thấy:

$$\log_9[3\log_3(1 + \log_2 2)] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_9(3\log_3 2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_3 2^3 = 3$$

$\Leftrightarrow 2^3 = 3^3$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = 4 thay vào phương trình ta thấy:

$$\log_9[3\log_3(1+\log_2 4)] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_9(3\log_3 3) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_9 3 = \frac{1}{2}\text{, đúng}$$

x = 4 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Các đáp án A và C bị loại.

▪ Với x = 2 thay vào phương trình ta thấy:

$$\log_9[3\log_3(1+\log_2 2)] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_9(3\log_3 2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_3 2^3 = 3$$

$\Leftrightarrow 2^3 = 3^3$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Với bài toán trên:

▪ Nếu các em học sinh lựa chọn kiểu trình bày theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Bước 2: Sử dụng phép biến đổi để tìm nghiệm của phương trình.

Bước 3: Kết luận về nghiệm cho phương trình.

Thì các em phải thực hiện một công việc khá cồng kềnh và dư thừa ở bước 1.

▪ *Không nên dùng cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* với máy tính CASIO fx-570MS bởi khi đó chúng ta cần nhập một hàm khá dài vào máy tính.

Bài 16. Phương trình $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1$ có tập nghiệm là:

A. T = {0}. B. T = {1}. C. T = {1; 2}. D. T = {0; 2}.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Điều kiện:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_3[x(x+2)] = 1 \Leftrightarrow x(x+2) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {1}.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì x = 0 vi phạm điều kiện của logarit nên các đáp án A và D bị loại.

- Với x = 2 thay vào phương trình ta thấy:

$\log_3 2 + \log_3 4 = 1 \Leftrightarrow \log_3 8 = 1$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS* - Học sinh tự thực hiện.

Bài 17. Phương trình $\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0$ có tập nghiệm là:

A. T = {1}. B. T = {2}. C. T = {2; 3}. D. T = {1; 3}.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ 6x - 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > \sqrt{3} \\ x > \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{3}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_2\left(\frac{x^2-3}{6x-10}.2\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{3x-5} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 3x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} x = 2.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {2}.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_2(x^2 - 3) + 1 = \log_2(6x - 10) \Leftrightarrow \log_2[2(x^2 - 3)] = \log_2(6x - 10)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 10 > 0 \\ 2(x^2 - 3) = 6x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{5}{3} \\ 2x^2 - 6x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {2}.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

- Vì x = 1 vi phạm điều kiện của logarit nên các đáp án A và D bị loại.
- Với x = 3 thay vào phương trình ta thấy:

$\log_2 6 - \log_2 8 + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_2 \dfrac{3}{4} + 1 = 0$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS* - Học sinh tự thực hiện.

Bài 18. Phương trình $\log_3 x + \log_4 x = \log_5 x$ có tập nghiệm là:

A. T = {1}. B. T = {1; 6}. C. T = {1; 7}. D. T = {1; 10}.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Điều kiện x > 0.

Ta đi biến đổi về cùng cơ số 3: $\log_4 x = \log_4 3.\log_3 x$, $\log_5 x = \log_5 3.\log_3 x$.

Khi đó, phương trình có dạng: $\log_3 x + \log_4 3.\log_3 x = \log_5 3.\log_3 x$

$\Leftrightarrow \log_3 x(1 + \log_4 3 - \log_5 3) = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {1}.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Với x = 6 thì: $VT = \log_3 6 + \log_4 6 > 1 + 1 = 2$ và $VP = \log_5 6 < 2$

  $\Rightarrow$ x = 6 không là nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.
- Với x = 7 thì: $VT = \log_3 7 + \log_4 7 > 1 + 1 = 2$ và $VP = \log_5 7 < 2$

  $\Rightarrow$ x = 7 không là nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.
- Với x = 10 thì: $VT = \log_3 10 + \log_4 10 > 2 + 1 = 3$ và $VP = \log_5 10 < 2$

  $\Rightarrow$ x = 10 không là nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Nhập $\log_3 x + \log_4 x - \log_5 x$ ta ấn:

(ln ALPHA X) ÷ ln 3 + (ln ALPHA X) ÷ ln 4
– (ln ALPHA X) ÷ ln 5

- Khi đó, ta thử với các giá trị x = 6, x = 7 và x = 10:

CALC 6 = | 1.8101

$\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

CALC 7 = | 1.9658

$\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

CALC 10 = | 2.3261

$\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 19. Phương trình $4^{x+1} - 6.2^{x+1} + 8 = 0$ có tập nghiệm là:

A. T = {0}. B. T = {1}. C. T = {0; 1}. D. Vô nghiệm.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt $t = 2^{x+1}$, t > 0.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x+1} = 2 \\ 2^{x+1} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = 1 \\ x+1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {0; 1}.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = 0 thay vào phương trình ta thấy:

$4 - 6.2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng $\Rightarrow$ x = 0 là nghiệm của phương trình

$\Rightarrow$ Các đáp án B và D bị loại.

▪ Với x = 1 thay vào phương trình ta thấy:

$16 - 6.4 + 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng $\Rightarrow$ x = 1 là nghiệm của phương trình

$\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận và máy tính* CASIO fx – 570MS: bằng cách thực hiện theo thứ tự:

▪ Nhập $4^{x+1} - 6.2^{x+1} + 8$ ta ấn:

4 [^] [(] [ALPHA] [X] [+] 1 [)] [–] 6 [×] 2 [^] [(] [ALPHA] [X] [+] 1 [)] [+] 8

▪ Khi đó, ta thử với các giá trị x = 0 và x = 1:

[CALC] 0 [=] | 0 |

$\Rightarrow$ x = 0 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Các đáp án B và D bị loại.

[CALC] 1 [=] | 0 |

$\Rightarrow$ x = 1 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận,* chúng ta sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ dạng 1 cho phương trình mũ, cụ thể với phương trình:

$\alpha_k a^{kx} + \alpha_{k-1}a^{(k-1)x}...\alpha_1 a^x + \alpha_0 = 0,$

ta đặt $t = a^x$, điều kiện $t > 0$. Phương trình có dạng:

$\alpha_k t^k + \alpha_{k-1}t^{k-1}...\alpha_1 t + a_0 = 0.$

Mở rộng: Nếu đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện hẹp $t > 0$. Khi đó:

$a^{2f(x)} = t^2, a^{3f(x)} = t^3, ..., a^{kf(x)} = t^k$ và $a^{-f(x)} = \frac{1}{t}$.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* chúng ta thực hiện tương tự như những bài toán khác.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* sử dụng máy tính CASIO fx-570MS chúng ta khai báo hàm số vào máy tính và thực hiện các phép thử.

Bài 20. Phương trình $3^{4x+8} - 4.3^{2x+5} + 27 = 0$ có tập nghiệm là:

A. $T=\left\{\frac{3}{2}; -1\right\}$. B. $T = \left\{\frac{3}{2}; 1\right\}$.

C. $T=\left\{-\frac{3}{2}; -1\right\}$. D. $T= \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Biến đổi phương trình về dạng: $3^{4x+8} - 12.3^{2x+4} + 27 = 0$.

Đặt $t = 3^{2x+4}$, $(t > 0)$, phương trình có dạng:

$$t^2 - 12t + 27 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{2x+4}=3 \\ 3^{2x+4}=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+4=1 \\ 2x+4=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{3}{2} \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là $T = \left\{-\frac{3}{2}; -1\right\}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $x = -1$ thay vào phương trình ta thấy:

$3^4 - 4.3^3 + 27 = 0 \Leftrightarrow 81 - 108 + 27 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng

$\Rightarrow x = -1$ là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Các đáp án B và D bị loại.

▪ Với $x = \frac{3}{2}$ thay vào phương trình ta thấy:

$3^{14} - 4.3^6 + 27 = 0 \Leftrightarrow 4780080 = 0$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = 1 thay vào phương trình ta thấy:

$3^{12} - 4.3^7 + 27 = 0 \Leftrightarrow 522720 = 0$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Các đáp án B và D bị loại.

▪ Với $x = -\frac{3}{2}$ thay vào phương trình ta thấy:

$3^2 - 4.3^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow 9 - 36 + 27 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng

$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận và máy tính* CASIO fx – 570MS: bằng cách thực hiện theo thứ tự:

▪ Nhập $3^{4x+8} - 4.3^{2x+5} + 27$ ta ấn:

3 ^ (4 ALPHA X + 8) – 4 × 3 ^ (2 ALPHA X + 5) + 27

▪ Khi đó, ta thử với các giá trị x = -1 và $x = \frac{3}{2}$:

CALC (–) 1 = 　　　0

$\Rightarrow$ x = -1 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Các đáp án B và D bị loại.

CALC 3 a b/c 2 = 　　　4780080

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 21. Phương trình $3^{1+x} + 3^{1-x} = 10$ có tập nghiệm là:

A. T = {-1; 0}. 　B. T = {0; 1}. 　C. T = {-1; 1}. 　D. Vô nghiệm.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Biến đổi phương trình về dạng: $3.3^x + 3.3^{-x} = 10$.

Đặt $t = 3^x$, (t > 0), phương trình có dạng:

$$3t + \frac{3}{t} = 10 \Leftrightarrow 3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{3} \\ t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = \frac{1}{3} \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {±1}.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = -1 thay vào phương trình ta thấy:

$1 + 9 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10$, đúng $\Rightarrow$ x = -1 là nghiệm của phương trình

$\Rightarrow$ Các đáp án B và D bị loại.

▪ Với x = 0 thay vào phương trình ta thấy:

$3 + 3 = 10 \Leftrightarrow 6 = 10$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận và máy tính* CASIO fx – 570MS: bằng cách thực hiện theo thứ tự:

▪ Nhập $3^{1+x} + 3^{1-x} - 10$ ta ấn:

3 ^ (1 + ALPHA X) + 3 ^ (1 – ALPHA X) – 10

▪ Khi đó, ta thử với các giá trị x = -1 và x = 0:

CALC 0 = 　　　　0

$\Rightarrow$ x = -1 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Các đáp án B và D bị loại.

CALC 0 = 　　　　–4

$\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 22. Phương trình $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4$ có tập nghiệm là:

A. $T = \{1;\ 2-\sqrt{3}\}$.　　　　B. $T = \{-1;\ 2+\sqrt{3}\}$.

C. $T = \{\pm 1\}$.　　　　D. $T = \{2 \pm \sqrt{3}\}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Nhận xét rằng $(2-\sqrt{3}).(2+\sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$.

Do đó, nếu đặt $t = (2+\sqrt{3})^x$, điều kiện $t > 0$, thì $(2-\sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$.

Khi đó, phương trình tương đương với:

$$\frac{1}{t} + t = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2+\sqrt{3} \\ t = 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2+\sqrt{3})^x = 2+\sqrt{3} \\ (2+\sqrt{3})^x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2+\sqrt{3})^x = 2+\sqrt{3} \\ (2+\sqrt{3})^x = (2+\sqrt{3})^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm $T = \{\pm 1\}$.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với x = 1 thay vào phương trình ta thấy:

$2 - \sqrt{3} + 2 + 2 - \sqrt{3} = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$, đúng $\Rightarrow$ Các áp án B và D bị loại.

▪ Với x = -1 thay vào phương trình ta thấy:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=4 \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=4$$, đúng $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

▪ Nhập $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x$ ta ấn:

(2 − √ 3) ^ ALPHA X + (2 + √ 3) ^ ALPHA X

▪ Khi đó, ta lần lượt với các giá trị x = 1 và x = -1:

CALC 1 = 4

$\Rightarrow$ x = 1 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Các đáp án B và D bị loại.

CALC (−) 1 = 4

$\Rightarrow$ x = -1 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận,* chúng ta sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ dạng 1 cho phương trình mũ, cụ thể với phương trình: $\alpha_1 a^x + \alpha_2 b^x + \alpha_3 = 0$, với a.b = 1

Khi đó đặt $t = a^x$, điều kiện t > 0, suy ra $b^x = \frac{1}{t}$, ta được:

$$\alpha_1 t + \frac{\alpha_2}{t} + \alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_2 = 0.$$

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* chúng ta thực hiện tương tự như những bài toán khác.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* sử dụng máy tính CASIO fx-570MS, các em học sinh cần thận trọng khi khai báo căn thức vào máy tính.

Bài 23. Phương trình $4^x + 6^x = 2.9^x$ có tập nghiệm là:

A. T = {-2}. B. T = {-1}. C. T = {0}. D. T = {1}.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Chia cả hai vế của phương trình cho 9^x, ta được:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x + \left(\frac{6}{9}\right)^x = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2.$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, điều kiện $t > 0$. (*)

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$t^2 + t - 2 = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm $T = \{0\}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt đánh giá:

- Với $x < 0$ thì: $-x > 0 \Rightarrow 4^x + 6^x < 9^x + 9^x = 2.9^x \Rightarrow$ Các đáp án A và B bị loại.
- Với $x = 0$ thay vào phương trình ta thấy:

  $1 + 1 = 2.1 \Leftrightarrow 2 = 2$, đúng $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt đánh giá:

- Với $x = -2$ thay vào phương trình ta thấy:

  $\frac{1}{16} + \frac{1}{36} = \frac{2}{81}$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.
- Với $x = -1$ thay vào phương trình ta thấy:

  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.
- Với $x = 0$ thay vào phương trình ta thấy: $1 + 1 = 2.1 \Leftrightarrow 2 = 2$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận và máy tính* CASIO fx – 570MS:
Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Nhập $4^x + 6^x - 2.9^x$ ta ấn:

4 [^] [ALPHA] [X] [+] 6 [^] [ALPHA] [X] [−] 2 [×] 9 [^] [ALPHA] [X]

- Khi đó, ta thử với các giá trị $x = -2$, $x = -1$ và $x = 0$:

[CALC] [(−)] 2 [=] — 85⌟1296

$\Rightarrow x = -2$ không phải là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

[CALC] [(−)] 1 [=] — 7⌟36

$\Rightarrow x = -1$ không phải là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

[CALC] 0 [=] — 0

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 24. Phương trình $3.25^x + 2.49^x = 5.35^x$ có tập nghiệm là:

A. $T = \{0; 1\}$.

B. $T = \left\{0; \log_{\frac{5}{7}} \frac{2}{3}\right\}$.

C. $T = \{2; 1\}$.

D. $T = \left\{2; \log_{\frac{5}{7}} \frac{2}{3}\right\}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Biến đổi phương trình về dạng:

$$3.5^{2x} + 2.7^{2x} = 5.(5.7)^x \Leftrightarrow 3.5^{2x} + 2.7^{2x} = 5.5^x.7^x.$$

Chia cả hai vế của phương trình cho 7^{2x}, ta được:

$$3\left(\frac{5}{7}\right)^{2x} + 2 = 5\left(\frac{5}{7}\right)^x \Leftrightarrow 3\left(\frac{5}{7}\right)^{2x} - 5\left(\frac{5}{7}\right)^x + 2 = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{5}{7}\right)^x$, $(t > 0)$, phương trình có dạng:

$$3t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{5}{7}\right)^x = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_{\frac{5}{7}} \frac{2}{3} \end{array}\right..$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là $T = \left\{0; \log_{\frac{5}{7}} \frac{2}{3}\right\}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $x = 0$ thay vào phương trình ta thấy:

  $3 + 2 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5$, đúng $\Rightarrow x = 0$ là nghiệm của phương trình

  $\Rightarrow$ Các đáp án C và D bị loại.

- Với $x = 1$ thay vào phương trình ta thấy:

  $3.25 + 2.49 = 5.35 \Leftrightarrow 173 = 175$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với $x = 1$ thay vào phương trình ta thấy:

  $3.25 + 2.49 = 5.35 \Leftrightarrow 173 = 175$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Các đáp án A và C bị loại.

- Với $x = 0$ thay vào phương trình ta thấy:

  $3 + 2 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5$, đúng $\Rightarrow x = 0$ là nghiệm của phương trình

  $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận và máy tính* CASIO fx – 570MS: bằng cách thực hiện theo thứ tự:

▪ Nhập $3.25^x + 2.49^x - 5.35^x$ ta ấn:

3 × 25 ^ ALPHA X + 2 × 49 ^ ALPHA X − 5 × 35 ^ ALPHA X

▪ Khi đó, ta thử với các giá trị x = 0 và x = 1:

CALC (−) 1 = 0

⇒ x = 0 là nghiệm của phương trình ⇒ Các đáp án C và D bị loại.

CALC 1 = −2

⇒ x = 0 không là nghiệm của phương trình ⇒ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận,* chúng ta sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ (tương tự **Bài 23**), cụ thể với phương trình: $\alpha_1 a^{2x} + \alpha_2(ab)^x + \alpha_3 b^{2x} = 0$,

Khi đó, chia hai vế của phương trình cho $b^{2x} > 0$ (hoặc a^{2x}, $(a.b)^x$), ta được:

$$\alpha_1\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + \alpha_2\left(\frac{a}{b}\right)^{x} + \alpha_3 = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, điều kiện t > 0, ta được: $\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3 = 0$.

Mở rộng: Với phương trình mũ có chứa các nhân tử a^{2f}, b^{2f}, $(a.b)^f$, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chia hai vế của phương trình cho $b^{2f} > 0$ (hoặc a^{2f}, $(a.b)^f$).

Bước 2: Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^f$, điều kiện hẹp t > 0.

Bước 1: Giải phương trình mới.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1, 2* chúng ta thực hiện các phép thử từ trái qua phải và từ phải qua trái với việc lựa chọn các giá trị x thuận lợi cho mỗi phép thử.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* sử dụng máy tính CASIO fx-570MS chúng ta thực hiện tương tự như trong các bài tập khác.

Bài 25. Phương trình $27^x + 12^x = 2.8^x$ có tập nghiệm là:

A. T = {1}. B. T = {0}. C. T = {-1}. D. Cả A, B, C.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Chia cả hai vế của phương trình cho 8^x, ta được:

$$\left(\frac{27}{8}\right)^x + \left(\frac{12}{8}\right)^x = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2.$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$ ta biến đổi phương trình về dạng:

$$t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm $T = \{0\}$.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

- Với $x = 1$ thay vào phương trình ta thấy:

  $27 + 12 = 2.8 \Leftrightarrow 39 = 16$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Các đáp án A và D bị loại.

- Với $x = 0$ thay vào phương trình ta thấy:

  $1 + 1 = 2$, đúng $\Rightarrow x = 0$ là nghiệm của phương trình.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Nhập $27^x + 12^x - 2.8^x$ ta ấn:

27 [^] [ALPHA] [X] [+] 12 [^] [ALPHA] [X] [–] 2 [×] 8 [^] [ALPHA] [X]

- Khi đó, ta thử với các giá trị $x = 2$ và $x = 1$:

[CALC] 2 [=] | 23

$\Rightarrow$ Các đáp án A và D bị loại.

[CALC] 1 [=] | 0

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 26. Phương trình $\frac{1}{9}\lg^2 x^3 - 6\lg\sqrt{x} + 2 = 0$ có tập nghiệm là:

A. $T = \{10; 100\}$. B. $T = \{10; 1000\}$.

C. $T = \{1; 100\}$. D. $T = \{1; 1000\}$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{9}(3\lg x)^2 - 6.\frac{1}{2}\lg x + 2 = 0 \Leftrightarrow \lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0.$$

Đặt t = lgx, ta biến đổi phương trình về dạng:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = 1 \\ \lg x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = 100 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm là T = {10; 100}.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Với x = 10 thay vào phương trình ta thấy:

$\frac{1}{9}\lg^2 10^3 - 6\lg\sqrt{10} + 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng $\Rightarrow$ Các áp án C và D bị loại.

- Với x = 100 thay vào phương trình ta thấy:

$\frac{1}{9}\lg^2(100)^3 - 6\lg 100 + 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{9}(3\lg x)^2 - 6.\frac{1}{2}\lg x + 2 = 0 \Leftrightarrow \lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0.$$

- Với x = 10 thay vào phương trình ta thấy:

$\lg^2 10 - 3\lg 10 + 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng $\Rightarrow$ Các đáp án C và D bị loại.

- Với x = 100 thay vào phương trình ta thấy:

$\lg^2 100 - 3\lg 100 + 2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận và sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{9}(3\lg x)^2 - 6.\frac{1}{2}\lg x + 2 = 0 \Leftrightarrow \lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0.$$

- Nhập $\lg^2 x - 3\lg x + 2$ ta ấn:

(log ALPHA X) x^2 – 3 log ALPHA X + 2

- Khi đó, ta lần lượt với các giá trị x = 10 và x = 100:

CALC 10 =   0

$\Rightarrow$ x = 10 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Các đáp án C và D bị loại.

CALC 100 =   0

$\Rightarrow$ x = 100 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận,* chúng ta sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ dạng 1 cho phương trình logarit, cụ thể nếu đặt $t = \log_a x$ thì:

$\log_a^k x = t^k$, với $x > 0$

$\log_x a = \frac{1}{t}$, với $0 < x \neq 1$.

Trong lời giải trên, các em học sinh rất dễ mắc lỗi biến đổi:

$\lg^2 x^3 = 3\lg^2 x$ (biến đổi đúng là $\lg^2 x^3 = 9\lg^2 x$).

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* chúng ta thực hiện tương tự như những bài toán khác.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận,* chúng ta thực hiện biến đổi qua phương trình về dạng tường minh hơn để việc thực hiện các phép thử được dễ dàng.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* sử dụng máy tính CASIO fx-570MS, chúng ta thực hiện một bước đệm (biến đổi phương trình về dạng mới) để việc khai báo hàm số vào máy tính được thuận tiện hơn.

Bài 27. Phương trình $\frac{1}{4}\log_2^2(x-1)^2 + \log_2(x-1)^3 = 4$ có tập nghiệm là:

A. $T = \left\{\frac{17}{16}; 3\right\}$. B. $T = \left\{\frac{17}{16}; -3\right\}$.

C. $T = \left\{-\frac{17}{16}; 3\right\}$. D. $T = \left\{-\frac{17}{16}; -3\right\}$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Điều kiện $x > 1$.

Biến đổi phương trình về dạng: $\log_2^2(x-1) + 3\log_2(x-1) - 4 = 0$.

Đặt $t = \log_2(x - 1)$, phương trình có dạng:

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x-1) = 1 \\ \log_2(x-1) = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 = 2 \\ x-1 = \frac{1}{16} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{17}{16} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm $T = \left\{\frac{17}{16}; 3\right\}$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $x = 3$ thay vào phương trình ta thấy: $\frac{1}{4}\log_2^2 2^2 + \log_2 2^3 = 4 \Leftrightarrow 1 + 3 = 4$, đúng $\Rightarrow x = 3$ là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Các đáp án B và D bị loại.

▪ Vì $x = -\frac{17}{16}$ vi phạm điều kiện có nghĩa $(x - 1 > 0)$ của logarit nên đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì $x = -3$ vi phạm điều kiện có nghĩa $(x - 1 > 0)$ của logarit nên các đáp án B và D bị loại.

▪ Với $x = \frac{17}{16}$ thay vào phương trình ta thấy:

$$\frac{1}{4}\log_2^2\frac{1}{16^2} + \log_2\frac{1}{16^3} = 4 \Leftrightarrow 16 - 12 = 4, \text{ đúng}$$

$$\Rightarrow x = \frac{17}{16} \text{ là nghiệm của phương trình} \Rightarrow \text{Đáp án C bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: có điều kiện:

$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow \text{Các đáp án B, C và D bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 28. Phương trình $4\log_9 x + \log_x 3 = 3$ có tập nghiệm là:

A. $T = \{1; 9\}$. B. $T = \{\sqrt{3}; 3\}$. C. $T = \{3; \sqrt{6}\}$. D. $T = \{\sqrt{3}; 9\}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4.\frac{1}{2}\log_3 x + \log_x 3 = 3 \Leftrightarrow 2\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = 3.$$

Đặt $t = \log_3 x$, phương trình có dạng:

$$2t + \frac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm $T = \{\sqrt{3}; 3\}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì $x = 1$ vi phạm điều kiện có nghĩa của cơ số logarit nên đáp án A bị loại.

▪ Với $x = \sqrt{3}$ thay vào phương trình ta thấy:

$$4\log_9\sqrt{3} + \log_{\sqrt{3}} 3 = 3 \Leftrightarrow 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + 2 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3, \text{ đúng}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3} \text{ là nghiệm của phương trình} \Rightarrow \text{Đáp án C bị loại.}$$

- Với x = 3 thay vào phương trình ta thấy:

  $4\log_9 3 + \log_3 3 = 3 \Leftrightarrow 4.\frac{1}{2} + 1 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$, đúng

  $\Rightarrow$ x = 3 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt đánh giá:

- Với x = 9 thay vào phương trình ta thấy:

  $4\log_9 9 + \log_9 3 = 3 \Leftrightarrow 4 + \frac{1}{2} = 3$, mâu thuẫn

  $\Rightarrow$ x = 9 không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Các đáp án A và D bị loại.

- Với x = $\sqrt{3}$ thay vào phương trình ta thấy:

  $4\log_9 \sqrt{3} + \log_{\sqrt{3}} 3 = 3 \Leftrightarrow 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + 2 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$, đúng

  $\Rightarrow$ x = $\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Nhập $4\log_9 x + \log_x 3$ ta ấn:

4 × ln ALPHA X ÷ ln 9 + ln 3 ÷ ln ALPHA X

- Khi đó, ta thử với các giá trị x = 1, x = $\sqrt{3}$ và x = 3:

CALC 1 = ERROR

$\Rightarrow$ x = 1 không phải là nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

CALC √ 3 = 3

$\Rightarrow$ x = $\sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

CALC 3 = 3

$\Rightarrow$ x = 3 là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 29. Phương trình $\frac{1+\log_3 x}{1+\log_9 x} = \frac{1+\log_{27} x}{1+\log_{81} x}$ có tập nghiệm là:

A. T = {1; 3^{-3}}. B. T = {1; 3^{-4}}. C. T = {1; 3^{-5}}. D. T = {1; 3^{-6}}.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1+\log_3 x}{1+\frac{1}{2}\log_3 x}=\frac{1+\frac{1}{3}\log_3 x}{1+\frac{1}{4}\log_3 x}\Leftrightarrow\frac{2+2\log_3 x}{2+\log_3 x}=\frac{12+4\log_3 x}{12+3\log_3 x}$$

Đặt $t = \log_3 x$, (điều kiện $t \neq -2$ và $t \neq -4$) phương trình có dạng:

$$\frac{2+2t}{2+t}=\frac{12+4t}{12+3t}\Leftrightarrow t^2+5t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=0\\\log_3 x=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3^{-5}\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm $T = \{1; 3^{-5}\}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1 kết hợp tự luận*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1+\log_3 x}{1+\frac{1}{2}\log_3 x}=\frac{1+\frac{1}{3}\log_3 x}{1+\frac{1}{4}\log_3 x}\Leftrightarrow\frac{2+2\log_3 x}{2+\log_3 x}=\frac{12+4\log_3 x}{12+3\log_3 x}$$

Ta lần lượt đánh giá:

- Với $x = 3^{-3}$ thay vào phương trình ta thấy:

$$\frac{2+2\log_3 3^{-3}}{2+\log_3 3^{-3}}=\frac{12+4\log_3 3^{-3}}{12+3\log_3 3^{-3}}\Leftrightarrow\frac{2-6}{2-3}=\frac{12-12}{12-9}\Leftrightarrow 4=0\text{, mâu thuẫn}$$

$\Rightarrow x = 3^{-3}$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với $x = 3^{-4}$ thay vào phương trình ta thấy:

$$\frac{2+2.\log_3 3^{-4}}{2+\log_3 3^{-4}}=\frac{12+4\log_3 3^{-4}}{12+3\log_3 3^{-4}}\Leftrightarrow\frac{2-8}{2-8}=\frac{12-16}{12-12}\text{, vi phạm}$$

$\Rightarrow x = 3^{-4}$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

- Với $x = 3^{-5}$ thay vào phương trình ta thấy:

$$\frac{2+2\log_3 3^{-5}}{2+\log_3 3^{-5}}=\frac{12+4\log_3 3^{-5}}{12+3\log_3 3^{-5}}\Leftrightarrow\frac{2-10}{2-5}=\frac{12-20}{12-15}\Leftrightarrow\frac{8}{3}=\frac{8}{3}\text{, đúng}$$

$\Rightarrow x = 3^{-5}$ là nghiệm của phương trình.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2 kết hợp tự luận*: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1+\log_3 x}{1+\frac{1}{2}\log_3 x}=\frac{1+\frac{1}{3}\log_3 x}{1+\frac{1}{4}\log_3 x}\Leftrightarrow\frac{2+2\log_3 x}{2+\log_3 x}=\frac{12+4\log_3 x}{12+3\log_3 x}$$

Ta lần lượt đánh giá:

- Với $x = 3^{-6}$ thay vào phương trình ta thấy:

$$\frac{2+2\log_3 3^{-6}}{2+\log_3 3^{-6}}=\frac{12+4\log_3 3^{-6}}{12+3\log_3 3^{-6}} \Leftrightarrow \frac{2-12}{2-6}=\frac{12-24}{12-18} \Leftrightarrow \frac{5}{2}=2\text{, mâu thuẫn}$$

$\Rightarrow x = 3^{-6}$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

- Với $x = 3^{-5}$ thay vào phương trình ta thấy:

$$\frac{2+2\log_3 3^{-5}}{2+\log_3 3^{-5}}=\frac{12+4\log_3 3^{-5}}{12+3\log_3 3^{-5}} \Leftrightarrow \frac{2-10}{2-5}=\frac{12-20}{12-15} \Leftrightarrow \frac{8}{3}=\frac{8}{3}\text{, đúng}$$

$\Rightarrow x = 3^{-5}$ là nghiệm của phương trình.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 30. Phương trình $\log_5 x^4 - \log_2 x^3 + 6\log_2 x.\log_5 x = 2$ có tập nghiệm là:

A. $T = \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{5}}; \sqrt{2}\right\}$.

B. $T = \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{5}}; \sqrt{5}\right\}$.

C. $T = \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \sqrt{2}\right\}$.

D. $T = \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \sqrt{5}\right\}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Điều kiện $x > 0$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\log_5 x - 3\log_2 x + 6\log_2 x.\log_5 x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2\log_5 x - 1)(3\log_2 x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_5 x - 1 = 0 \\ 3\log_2 x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = \frac{1}{2} \\ \log_2 x = -\frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{5} \\ x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm $T = \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \sqrt{5}\right\}$.

PHẦN III NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

§1 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM NGUYÊN HÀM



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số f(x) *liên tục trên khoảng* I. *Hàm số* F(x) *được gọi là nguyên hàm của hàm số* f(x) *trên* I *nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi* x *thuộc* I.

Định lí: Nếu F(x) *là một nguyên hàm của hàm số* f(x) *trên khoảng* I *thì:*

a. Với mọi hằng số C, *hàm số* $G(x) = F(x) + C$ *cũng là một nguyên hàm của* f(x).

b. Ngược lại, nếu G(x) *là một nguyên hàm bất kì của* f(x) *thì tồn tại hằng số C sao cho* $G(x) = F(x) + C$ *với mọi* x *thuộc* I.

Ký hiệu họ tất cả các nguyên hàm của hàm số f(x) là $\int f(x)dx$. Vậy ta viết:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Ta có: $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

2. Bảng các nguyên hàm

Nguyên hàm các hàm số sơ cấp thường gặp	Nguyên hàm các hàm số sơ cấp hợp (với u = u(x))
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$
$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int u^{a}.du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C, x \neq 0$	$\int \frac{dx}{u} = \ln\lvert u\rvert + C, u = u(x) \neq 0$
$\int e^{x}dx = e^{x} + C$	$\int e^{u}du = e^{u} + C$
$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1$	$\int a^{u}du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u dx = -\cos u + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 u} = \tan u + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 u} = -\cot u + C$

3. Các tính chất của nguyên hàm

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, với $a \neq 0$.

2. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

3. $\int f(t)\,dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C$.

4. Phương pháp đổi biến số

Các phương pháp đổi biến số được sử dụng khá phổ biến trong việc tính tích phân. Cơ sở của phương pháp đổi biến số là công thức sau:

Định lí:

a. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ và $u = \varphi(x)$ là hàm số có đạo hàm thì $\int f(u)du = F(u) + C$.

b. Nếu hàm số f(x) liên tục thì khi đặt $x = \varphi(t)$ trong đó $\varphi(t)$ cùng với đạo hàm của nó $\varphi'(t)$ là những hàm số liên tục, ta sẽ được $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$.

Từ đó, chúng ta thấy có hai phương pháp đổi biến gọi là dạng 1 và dạng 2.

Để sử dụng *phương pháp đổi biến dạng 1* tìm nguyên hàm của hàm số f(x) chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn $x = \varphi(t)$, trong đó $\varphi(t)$ là hàm số mà ta chọn cho thích hợp.

Bước 2: Lấy vi phân $dx = \varphi'(t)dt$.

Bước 3: Biểu thị f(x)dx theo t và dt. Giả sử rằng: $f(x)dx = g(t)dt$.

Bước 4: Khi đó: $\int f(x)dx = \int g(t)dt$.

Lưu ý: Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \lvert a\rvert \sin t \text{ với } -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ x = \lvert a\rvert \cos t \text{ với } 0 \le t \le \pi \end{array}\right.$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\lvert a\rvert}{\sin t} \text{ với } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ x = \frac{\lvert a\rvert}{\cos t} \text{ với } t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \end{array}\right.$

$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \lvert a \rvert \tan t \text{ với } -\pi/2 < t < \pi/2 \\ x = \lvert a \rvert \cot t \text{ với } 0 < t < \pi \end{array}\right.$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a.\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b - a)\sin^2 t$

Để sử dụng *phương pháp đổi biến dạng 2* tìm nguyên hàm của hàm số f(x), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn $t = \varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn cho thích hợp, rồi xác định $x = \psi(t)$ (nếu có thể).

Bước 2: Xác định vi phân $dx = \varphi'(t)dt$.

Bước 3: Biểu thị f(x)dx theo t và dt. Giả sử rằng $f(x)dx = g(t)dt$.

Bước 4: Khi đó: $I = \int g(t)dt$.

Lưu ý: Các dấu hiệu dẫn tới việc lựa chọn ẩn phụ kiểu trên thông thường là:

Dấu hiệu	**Có thể chọn**
Hàm có mẫu số	t là mẫu số
Hàm $f(x, \sqrt{\varphi(x)})$	$t = \sqrt{\varphi(x)}$
Hàm $f(x)=\frac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x + e}$	$t = \tan\frac{x}{2}$ (với $\cos\frac{x}{2} \neq 0$)
Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$	Với $x + a > 0$ và $x + b > 0$, đặt: $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ Với $x + a < 0$ và $x + b < 0$, đặt: $t = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}$

5. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần

Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần được sử dụng khá phổ biến trong việc tìm nguyên hàm. Cơ sở của phương pháp là định lí sau:

Định lí: *Nếu* u(x), v(x) *là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên* I *thì*:

$$\int u(x).v'(x).dx = u(x)v(x) - \int v(x).u'(x).dx$$

hoặc viết $\int u.dv = uv - \int v.du$.

Để tìm nguyên hàm của hàm số f(x) bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi: $I = \int f(x)dx = \int f_1(x).f_2(x)dx$.

Bước 2: Đặt: $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}$

Bước 3: Khi đó: $I = uv - \int vdu$.

Lưu ý: Khi sử dụng *phương pháp lấy nguyên hàm từng phần* để tìm nguyên hàm, chúng ta cần tuân thủ các nguyên tắc sau:

a. Lựa chọn phép đặt dv sao cho v được xác định một cách dễ dàng.

b. Tích phân bất định $\int vdu$ được xác định một cách dễ dàng hơn so với I.

 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) = cosx và F(0) = 0 thì F(x) là:

A. 1 + sinx. B. sinx. C. 1 - sinx. D. -sinx.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Với hàm số f(x) = cosx thì: F(x) = sinx + C.

Khi đó, để F(0) = 0 điều kiện là:

$0 = \sin 0 + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \sin x$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Nguyên hàm của hàm số f(x) = cosx có dạng F(x) = sinx + C nên các đáp án C và D bị loại.

▪ Vì sin0 = 0 nên đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì (sinx)' = cosx nên các đáp án C và D bị loại.

▪ Với x = 0 thì 1 + sin0 = 1 nên đáp án A là đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 3:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Vì sin0 = 0 nên các đáp án A và C bị loại bởi khi đó F(0) = 1.

▪ Với hàm số trong B thì: f(x) = F'(x) = cosx, thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận* chúng ta thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Tính nguyên hàm của hàm số.

Bước 2: Xác định C bằng việc sử dụng giả thiết đồ thị hàm số y = F(x) đi qua điểm M.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* chúng ta loại trừ dần bằng việc thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Sử dụng bảng nguyên hàm có bản, chúng ta loại bỏ được các đáp án C và D bởi nó không có dạng - sinx.

Bước 2: Tính giá trị của sinx tại x = 0, để loại bỏ được đáp án A.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* chúng ta loại trừ dần bằng việc thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Sử dụng định nghĩa nguyên hàm, chúng ta loại bỏ được các đáp án C và D.

Bước 2: Thử tại x = 0 cho đáp án A, để khẳng định được đáp án A là sai. Từ đó khẳng định việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 3* chúng ta thực hiện phép thử theo các đáp án.

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{\cos^2 x}$. Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số và đồ thị của hàm số y = F(x) đi qua điểm $M\left(\frac{\pi}{6};0\right)$ thì F(x) là:

A. $\sqrt{3}$ - tanx. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ - tanx. C. - $\sqrt{3}$ + tanx. D. - $\frac{\sqrt{3}}{3}$ + tanx.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Với hàm số $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ thì: F(x) = tanx + C.

Khi đó, để đồ thị của hàm số y = F(x) đi qua điểm $M\left(\frac{\pi}{6};0\right)$ điều kiện là:

$0 = \tan\frac{\pi}{6} + C \Leftrightarrow C = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow F(x) = \tan x - \frac{\sqrt{3}}{3}$, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ có dạng F(x) = tanx + C nên các đáp án A và B bị loại.

- Vì $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ nên đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt đánh giá:

- Vì $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ nên các đáp án A và B bị loại.
- Với $x = \frac{\pi}{6}$ thì $-\frac{\sqrt{3}}{3} + \tan\frac{\pi}{6} = 0$ nên đáp án D là đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* Ta lần lượt đánh giá:

- Vì $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ nên các đáp án A và C bị loại bởi nó không đi qua M.
- Với hàm số trong B thì: $f(x) = F'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$, không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận,* chúng ta thực hiện tương tự bài 1.
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1,* chúng ta loại trừ dần bằng việc thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản, chúng ta loại bỏ được các đáp án A và B bởi nó không có dạng -tanx.

Bước 2: Tính giá trị của tanx tại $x = \frac{\pi}{6}$, để loại bỏ được đáp án C.

- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 2,* chúng ta loại trừ dần bằng việc thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Sử dụng định nghĩa nguyên hàm, chúng ta loại bỏ được các đáp án A và B.

Bước 2: Thử tại $x = \frac{\pi}{6}$ cho đáp án D, để khẳng định được đáp án D là đúng đắn.

- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 3* chúng ta thực hiện phép thử theo các đáp án.

Bài 3. Nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) = 2x + 1 và F(2) = 2 thì F(x) là:

A. $x^2 + x - 1$. B. $x^2 + x - 2$. C. $x^2 + x - 3$. D. $x^2 + x - 4$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Với hàm số f(x) = 2x + 1 thì: $F(x) = x^2 + x + C$.

Khi đó, để F(2) = 2 điều kiện là:

$2 = 4 + 2 + C \Leftrightarrow C = -4 \Rightarrow F(x) = x^2 + x - 4$, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với hàm số trong A thì:

$F(2) = 4 + 2 - 1 = 5$, không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại

▪ Với hàm số trong B thì:

$F(2) = 4 + 2 - 2 = 4$, không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại

▪ Với hàm số trong C thì:

$F(2) = 4 + 2 - 3 = 3$, không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án C bị loại

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với hàm số trong D thì: $F(2) = 4 + 2 - 4 = 2$, thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 4. Cho F(x) là nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x+1}$ và $F(2) = 1$. Khi đó F(8) bằng:

A. ln3. B. ln3 + 1. C. ln3 + 2. D. ln3 + 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Với hàm số $f(x) = \frac{1}{x+1}$ thì: $F(x) = \ln|x + 1| + C$.

Khi đó, để $F(2) = 1$ điều kiện là:

$1 = \ln|2 + 1| + C \Leftrightarrow C = 1 - \ln3 \Rightarrow F(x) = \ln|x + 1| + 1 - \ln3$

$\Rightarrow F(8) = \ln|8 + 1| + 1 - \ln3 = 2\ln3 + 1 - \ln3 = \ln3 + 1$, ứng với đáp án B.

☞ Nhận xét: Như vậy, với dạng câu hỏi trên chúng ta chỉ có thể lựa chọn được đáp án đúng bằng cách làm tự luận.

Bài 5. $F(x) = \cos^2 3x$ là một nguyên hàm của hàm số:

A. $f(x) = -2\sin3x$. B. $f(x) = 6\sin3x$.

C. $f(x) = -6\sin3x.\cos3x$. D. $f(x) = 6\sin3x.\cos3x$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $F'(x) = (\cos^2 3x)' = -6\cos3x.\sin3x$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với hàm số trong A thì:

$F(x) = -2\int \sin 3x.dx = \frac{2}{3}\cos 3x + C$, không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại

- Với hàm số trong B thì:

  $F(x) = 6\int \sin 3x.dx = -2\cos 3x + C$, không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại

- Với hàm số trong C thì:

  $F(x) = -6\int \sin 3x.\cos 3x.dx = -3\int \sin 6x.dx = \frac{1}{2}\cos 6x + C = \frac{1}{2}(2\cos^2 3x + 1) + C$

  $= \cos^2 3x + C + 1$, thỏa mãn khi $C = -1$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với hàm số trong D thì:

  $F(x) = 6\int \sin 3x.\cos 3x.dx = 3\int \sin 6x.dx = -\frac{1}{2}\cos 6x + C = -\frac{1}{2}(2\cos^2 3x + 1) + C$

  $= -\cos^2 3x + C + 1$, không thỏa mãn $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

- Với hàm số trong C thì:

  $F(x) = -6\int \sin 3x.\cos 3x.dx = -3\int \sin 6x.dx = \frac{1}{2}\cos 6x + C = \frac{1}{2}(2\cos^2 3x + 1) + C$

  $= \cos^2 3x + C + 1$, thỏa mãn khi $C = -1$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, với dạng câu hỏi trên, việc lựa chọn đáp án bằng cách làm tự luận đơn giản hơn rất nhiều so với phép thử.

Bài 6. $F(x) = \sin 3x.\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số:

A. $3\cos 3x.\cos 2x$.

B. $-2\sin 3x.\sin 2x$.

C. $\sin 3x.\cos 2x$.

D. $3\cos 3x.\cos 2x - 2\sin 3x.\sin 2x$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có ngay:

$F'(x) = 3\cos 3x.\cos 2x - 2\sin 3x.\sin 2x$, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Ta lần lượt đánh giá với dạng hàm số $F = uv$:

- Đáp án A bị loại bởi nó là dạng $u'.v$.
- Đáp án B bị loại bởi nó là dạng $v'.u$.
- Đáp án C bị loại bởi với dạng hàm số đa cho không thể có $F' = F$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 7. $F(x) = \frac{x+1}{x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số:

A. $\frac{1}{x-1}$.   B. $\frac{2x}{(x-1)^2}$.   C. $\frac{2}{(x-1)^2}$.   D. $-\frac{2}{(x-1)^2}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có ngay:

$$F'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với dạng hàm số $F = \frac{u}{v}$ (bậc nhất trên bậc nhất) thì đạo hàm của nó luôn có dạng hằng số trên mẫu số bình, do đó các đáp án A và B bị loại.

▪ Với hàm số trong C thì:

$$F(x) = \int \frac{2dx}{(x-1)^2} = -\frac{2}{x-1} + C = \frac{Cx-C-2}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{Cx-C-2}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} C=1 \\ -C-2=1 \end{cases}$$, vô nghiệm $\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 8. $F(x) = \frac{x^2-2x+3}{x-2}$ là một nguyên hàm của hàm số:

A. $\frac{4x+1}{(x-2)^2}$.   B. $\frac{4x-1}{(x-2)^2}$.   C. $\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$.   D. $\frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta có ngay:

$$F'(x) = \frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x+3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$, ứng với đáp án C.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta có:

$$F(x) = x + \frac{3}{x-2} \Rightarrow F'(x) = 1 - \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Hàm số bậc hai trên bậc nhất khi lấy đạo hàm luôn có dạng bậc hai trên mẫu số bình, do đó các đáp án A và B bị loại.

▪ Với hàm số trong C thì:

$$F(x) = \int \frac{(x^2-4x+1)dx}{(x-2)^2} = \int \left[1 - \frac{3}{(x-2)^2}\right]dx = x + \frac{3}{x-2} = \frac{x^2-2x+3}{x-2}.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 9. $y = F(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ là một nguyên hàm của hàm số:

A. $\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$. B. $\frac{2x-1}{(x-1)^2}$. C. $\frac{2x-1}{(x+1)^2}$. D. $\frac{x^2-2x-1}{(x+1)^2}$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có ngay: $y' = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với hàm số dạng $y = \frac{u}{v}$ ta luôn có đạo hàm với mẫu số bình phương (cụ thể $y' = \frac{w}{v^2}$) thì chúng ta loại trừ ngay được các đáp án C, D.

▪ Với hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất thì ở đạo hàm y' ta luôn có w là một đa thức bậc hai, suy ra đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 10. $y = F(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ là một nguyên hàm của hàm số:

A. $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$. B. $(x - 2)(x - 3)$.

C. $3x^3 - 12x + 11$. D. $3x^2 - 12x + 11$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có ngay:

$$y' = (x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 3) + (x - 1)(x - 2) = 3x^2 - 12x + 11.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá với dạng hàm số y = uvw:

▪ Đáp án A bị loại bởi với dạng hàm đa thức không thể có y' = y.

▪ Đáp án B bị loại bởi nó là dạng u'.v.w.

▪ Đáp án C bị loại bởi bậc của y' không thể bằng bậc của y.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 11. Cho hàm số $f(x) = x + \frac{2}{x}$. Một nguyên hàm của f(x) bằng:

A. $x^2 + 2\ln|x| + 2009$. B. $\frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| + 2009$.

C. $x^2 - 2\ln|x| + 2009$. D. $\frac{1}{2}x^2 - 2\ln|x| + 2009$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có: $F(x) = \int\left(x + \frac{2}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| + C$

$\Rightarrow$ một nguyên hàm của f(x) là $\frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| + 2009$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $F(x) = x^2 + 2\ln|x| + 2009$ trong đáp án A thì:

$f(x) = (x^2 + 2\ln|x| + 2009)' = 2x + \frac{2}{x} \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

▪ Với $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| + 2009$ trong đáp án B thì:

$f(x) = (\frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| + 2009)' = x + \frac{2}{x}$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái) - *Học sinh tự thực hiện.*

Bài 12. Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$. Một nguyên hàm của f(x) bằng:

A. $-\cos 2x$. B. $-\frac{1}{2}\cos 2x$. C. $-2\cos 2x$. D. $\frac{1}{2}\cos 2x$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$F(x) = \int \sin 2x.dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C \Rightarrow$ hàm số f(x) có một nguyên hàm là $-\frac{1}{2}\cos 2x$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $F(x) = -\cos 2x$ thì:

$f(x) = (-\cos 2x)' = 2\sin 2x \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

▪ Với $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ thì: $f(x) = (-\frac{1}{2}\cos 2x)' = \sin 2x$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 - x$ có dạng:

A. $2x + \frac{1}{2}x^2 + C$. B. $2x - \frac{1}{2}x^2 + C$. C. $x - \frac{1}{2}x^2 + C$. D. $x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $F(x) = \int(1 - x)dx = x - \frac{1}{2}x^2 + C$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $F(x) = 2x + \frac{1}{2}x^2 + C$ trong đáp án A thì:

$f(x) = (2x + \frac{1}{2}x^2 + C)' = 2 + x \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

▪ Với $F(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + C$ trong đáp án B thì:

$f(x) = (2x - \frac{1}{2}x^2 + C)' = 2 - x \Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

▫ Với $F(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + C$ trong đáp án C thì: $f(x) = (x - \frac{1}{2}x^2 + C)' = 1 - x$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▫ Với $F(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + C$ trong đáp án D thì:

$f(x) = (x + \frac{1}{2}x^2 + C)' = 1 + x \Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

▫ Với $F(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + C$ trong đáp án C thì: $f(x) = (x - \frac{1}{2}x^2 + C)' = 1 - x$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Ta lần lượt đánh giá:

▫ Để có 1 trong f(x) thì trong F(x) phải có x, do đó các đáp án A và B bị loại.

▫ Để có -x trong f(x) thì trong F(x) phải có $-\frac{1}{2}x^2$, do đó đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 14. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - 9$ có dạng:

A. $x^4 - 9x + C$. B. $x^4 + 9x + C$. C. $x^3 + 9x + C$. D. $x^3 - 9x + C$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có: $F(x) = \int(4x^3 - 9)dx = x^4 - 9x + C$, ứng với đáp án A.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▫ Với $F(x) = x^4 - 9x + C$ trong đáp án A thì: $f(x) = (x^4 - 9x + C)' = 4x^3 - 9$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Ta lần lượt đánh giá:

▫ Để có $4x^3$ trong f(x) thì trong F(x) phải có x^4, do đó các đáp án C và D bị loại.

▫ Để có -9 trong f(x) thì trong F(x) phải có -9x, do đó đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 15. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$ có dạng:

A. $\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{x} + x + C$. B. $\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{x} + C$.

C. $\frac{1}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{x} + x + C$. D. $\frac{1}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{x} + C$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$F(x) = \int\left(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{x} + C$$, ứng với đáp án.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{x} + x + C$ trong đáp án A thì:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{x} + x + C\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + 1 \Rightarrow$$ Đáp án A bị loại.

▪ Với $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{x} + C$ trong đáp án B thì:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{x} + C\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Để có $-\frac{1}{x^2}$ trong f(x) thì trong F(x) phải có $\frac{1}{x}$, do đó các đáp án C và D bị loại.

▪ Trong F(x) của đáp án A có chứa x, suy ra f(x) phải chứa 1 (mâu thuẫn), do đó đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 16. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x + 2)(x + 3)$ có dạng:

A. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + C.$
B. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 8x + C.$
C. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x + C.$
D. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 8x + C.$

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có: $F(x) = \int(x + 2)(x + 3)dx = \int(x^2 + 5x + 6)dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x + C,$$ ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* - Học sinh tự thực hiện theo hai hướng (từ trái qua phải và từ phải qua trái).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Biến đổi hàm số về dạng:

$$f(x) = x^2 + 5x + 6.$$

Ta lần lượt đánh giá:

▪ Để có 5x trong f(x) thì trong F(x) phải có $\frac{5}{2}x^2$, do đó các đáp án A và B bị loại.

▪ Để có 6 trong f(x) thì trong F(x) phải có 6x, do đó đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 17. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x}$ có dạng:

A. $x^2 - 6x + C$. B. $\frac{1}{2}x^2 - 3x + C$. C. $\frac{1}{2}x^2 + 3x + C$. D. $x^2 + 6x + C$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$$F(x) = \int \frac{(x^2 - 3x)dx}{x} = \int (x-3)dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C, \text{ ứng với đáp án B.}$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $F(x) = x^2 - 6x + C$ trong đáp án A thì:

$f(x) = (x^2 - 6x + C)' = 2x - 6 \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

▪ Với $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$ trong đáp án B thì:

$f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - 3x + C)' = x - 3 = \frac{x^2 - 3x}{x}$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Viết lại hàm số dưới dạng: $f(x) = x - 3$.

Ta lần lượt đánh giá:

▪ Để có x trong f(x) thì trong F(x) phải có $\frac{1}{2}x^2$, do đó các đáp án A và D bị loại.

▪ Để có -3 trong f(x) thì trong F(x) phải có -3x, do đó đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 18. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$ có dạng:

A. $4\ln(1 + x^2) + C$. B. $3\ln(1 + x^2) + C$.

C. $2\ln(1 + x^2) + C$. D. $\ln(1 + x^2) + C$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \ln(1 + x^2) + C, \text{ ứng với đáp án D.}$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $F(x) = 4\ln(1 + x^2) + C$ trong đáp án A thì:

$f(x) = [4\ln(1 + x^2) + C]' = 4.\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{8x}{1+x^2}$ ⇒ Đáp án A bị loại.

▪ Bởi các đáp án A, B, C, D chỉ khác nhau ở hệ số và giả thiết cho hệ số 2 (tức 8:4 = 2) nên ta loại bỏ tiếp được các đáp án B và C.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $F(x) = \ln(1 + x^2) + C$ trong đáp án D thì:

$$f(x) = [\ln(1 + x^2) + C]' = \frac{2x}{1+x^2}$$ ⇒ Đáp án D đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận* chúng ta đã sử dụng phép biến đổi để xuất hiện dạng $\dfrac{u'}{u}$.

Đối với các hàm số hữu tỉ, chúng ta có hai nghiệm hàm mở rộng:

$$\int \frac{xdx}{x^2 \pm a} = \frac{1}{2}\ln|x^2 \pm a| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \text{ với, } a \neq 0.$$

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải), chúng ta sử dụng định nghĩa nguyên hàm cùng với việc đánh giá hệ số của các đáp án trắc nghiệm để loại bỏ ngay được A, B, C.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái), chúng ta thấy nó đúng nên dừng lại ở đó và khẳng định việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 19. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$ có dạng:

A. $x - \sin x + C$. **B.** $x + \sin x + C$. **C.** $x - \cos x + C$. **D.** $x + \cos x + C$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$$\int f(x)dx = \int 2\cos^2\frac{x}{2}dx = \int(1 + \cos x)dx = x + \sin x + C,$$ ứng với đáp án B.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $F(x) = x - \sin x + C$ trong đáp án A thì:

$$f(x) = (x - \sin x + C)' = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$ ⇒ Đáp án A bị loại.

■ Với $F(x) = x + \sin x + C$ trong đáp án B thì:

$$f(x) = (x + \sin x + C)' = 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} \Rightarrow \text{Đáp án B đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

■ *Trong cách giải tự luận* chúng ta đã sử dụng công thức hạ bậc để đưa về hàm lượng giác bậc thấp.

■ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* chúng ta sử dụng định nghĩa nguyên hàm cùng với phép biến đổi tổng thành tích.

Bài 20. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1 + e^{-x})$ có dạng:

A. $e^x - x + C$. B. $e^x + x + C$. C. $e^{-x} + x + C$. D. $e^{-x} - x + C$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\int f(x)dx = \int e^x(1 + e^{-x})dx = \int (e^x + 1)dx = e^x + x + C, \text{ ứng với đáp án B.}$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

■ Với $F(x) = e^x - x + C$ trong đáp án A thì:

$$f(x) = (e^x - x + C)' = e^x - 1 = e^x(1 - e^{-x}) \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

■ Với $F(x) = e^x + x + C$ trong đáp án B thì:

$$f(x) = (e^x + x + C)' = e^x + 1 = e^x(1 + e^{-x}) \Rightarrow \text{Đáp án B đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái) - *Học sinh tự thực hiện.*

Bài 21. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$. Khi đó:

A. $\int f(x)dx = \ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right| + C$. B. $\int f(x)dx = \ln\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right| + C$.

C. $\int f(x)dx = \ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| + C$. D. $\int f(x)dx = \ln\left|\dfrac{x+2}{x+1}\right| + C$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \ln|x + 1| - \ln|x + 2| + C = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C, \text{ ứng với đáp án B.}$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với F(x) trong đáp án A thì:

$$f(x) = \left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C\right)' = [\ln|x - 2| - \ln|x - 1| + C]'$$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x^2-3x+2} \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

▪ Với F(x) trong đáp án B thì:

$$f(x) = \left(\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C\right)' = [\ln|x + 1| - \ln|x + 2| + C]'$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x^2+3x+2} \Rightarrow \text{Đáp án B đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp phép đánh giá*: Ta lần lượt thấy:

▪ Vì $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ nên nguyên hàm của nó không thể chứa x - 1 và x - 2. Do đó, các đáp án A và C bị loại.

▪ Với F(x) trong đáp án B thì:

$$f(x) = \left(\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C\right)' = [\ln|x + 1| - \ln|x + 2| + C]'$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x^2+3x+2} \Rightarrow \text{Đáp án B đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận,* chúng ta đã sử dụng phương pháp phân tích để tìm nguyên hàm các hàm số hữu tỉ.

Cụ thể, với hàm số đã cho ta phân tích:

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A+B}{(x+1)(x+2)}$$

Ta được hằng đẳng thức:

$$1 = (A + B)x + 2A + B. \qquad (1)$$

Để xác định A, B trong (1) ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Phương pháp đồng nhất hệ số*): Đồng nhất đẳng thức, ta được:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}.$$

Cách 2: (*Phương pháp trị số riêng*): Lần lượt thay x = 1, x = 2 vào hai vế của (1) ta được A = 1 và B = -1.

Tức là, ta có: $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

Bài toán tiếp theo sẽ mở rộng cho dạng nguyên hàm này.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* chúng ta cần sử dụng một phép biến đổi logarit để đơn giản phép tính đạo hàm.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp với phép đánh giá,* chúng ta loại bỏ ngay được các đáp án A và C thông qua việc phân tích hàm số f(x) dưới dấu tích phân.

Bài 22. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$ có dạng:

A. $2\ln|x-1| + \ln|x+1| + C$.

B. $2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C$.

C. $\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + C$.

D. $\ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta phân tích:

$$\frac{x+3}{x^2-1} = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x+A-B}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A-B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \int\left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với F(x) trong đáp án A thì:

$$f(x) = (2\ln|x-1| + \ln|x+1| + C)' = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3x+1}{x^2-1}$$

⇒ Đáp án A bị loại.

▪ Với F(x) trong đáp án B thì:

$$f(x) = (2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C)' = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+3}{x^2-1}$$

⇒ Đáp án B đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng trích lược tự luận:* Ta phân tích:

$$\frac{x+3}{x^2-1} = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A - B}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A-B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Suy ra, hệ số của $\ln|x - 1|$ và $\ln|x + 1|$ theo thứ tự bằng 2 và -1.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 23. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x.\cos x$ có dạng:

A. $\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{6}\sin x + C.$

B. $\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin x + C.$

C. $\frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin x + C.$

D. $\frac{1}{2}\sin 3x + \frac{1}{6}\sin x + C.$

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int(\cos 3x + \cos x)dx = \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin x + C$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với F(x) trong đáp án A thì:

  $f(x) = F'(x) = \frac{3}{2}\cos 3x - \frac{1}{6}\cos x \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với F(x) trong đáp án B thì:

  $f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x = -\sin 2x.\sin x \Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

- Với F(x) trong đáp án C thì:

  $f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x = \cos 2x.\cos x \Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với F(x) trong đáp án D thì:

  $f(x) = F'(x) = \frac{3}{2}\cos 3x + \frac{1}{6}\cos x \Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

- Với F(x) trong đáp án C thì:

  $f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x = \cos 2x.\cos x \Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận* chúng ta sử dụng *phương pháp phân tích* để tìm nguyên hàm dựa trên các phép biến đổi tích thành tổng. Cụ thể, chúng ta có:

$$\cos x.\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x.\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\sin x.\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\cos x.\sin y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1 và 2* chúng ta thực hiện từ trái qua phải và từ phải qua trái.

Bài 24. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^4 x$ có dạng:

A. $\frac{1}{8}(3x + 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x) + C.$ B. $\frac{1}{8}(3x - 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x) + C.$

C. $\frac{1}{8}(3x + 2\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x) + C.$ D. $\frac{1}{8}(3x - 2\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x) + C.$

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$$\int f(x)dx = \int \cos^4 x.dx = \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)]dx = \frac{1}{8}\int(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)dx$$

$$= \frac{1}{8}(3x + 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x) + C,$$ ứng với đáp án A.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với F(x) trong đáp án A thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x) = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1)$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \cos^4 x \Rightarrow$$ Đáp án A đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận* chúng ta sử dụng *phương pháp phân tích* để tìm nguyên hàm dựa trên các công thức hạ bậc.

Cụ thể, chúng ta sử dụng các công thức sau:

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\qquad \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$;

$\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$; $\qquad \cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$

được sử dụng trong các phép hạ bậc mang tính cục bộ.

• Hằng đẳng thức: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. được sử dụng trong các phép hạ bậc mang tính toàn cục cho các biểu thức, thí dụ:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{3}{4}.$$
$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x.\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{8}\cos 4x + \frac{5}{8}.$$

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* chúng ta thực hiện từ trái qua phải và nhận thấy đáp án A là đúng nên dừng phép thử tại đây.

Bài 25. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ có dạng:

A. $\frac{1}{4}(3x + \frac{1}{4}\cos 4x) + C.$ $\qquad$ B. $\frac{1}{4}(3x - \frac{1}{4}\cos 4x) + C.$

C. $\frac{1}{4}(3x + \frac{1}{4}\sin 4x) + C.$ $\qquad$ D. $\frac{1}{4}(3x - \frac{1}{4}\sin 4x) + C.$

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** (*Sử dụng phép hạ bậc đơn*): Biến đổi f(x) về dạng:

$$f(x) = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{4}(3 + \cos 4x).$$

Khi đó:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{4}\int(3 + \cos 4x)dx = \frac{1}{4}(3x + \frac{1}{4}\sin 4x) + C,$$ ứng với đáp án C.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** (*Sử dụng phép hạ bậc toàn cục*): Biến đổi f(x) về dạng:

$$VT = \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$$
$$= 1 - \frac{1}{2}.\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}.\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{4}(3 + \cos 4x).$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \frac{1}{4}\int(3 + \cos4x)dx = \frac{1}{4}(3x + \frac{1}{4}\sin4x) + C$, ứng với đáp án C.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với $F(x) = \frac{1}{4}(3x \pm \frac{1}{4}\cos4x) + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{4}(3 \mp \sin4x) \Rightarrow f(0) = \frac{3}{4} \neq \sin^4 0 + \cos^4 0 = 1$$

$\Rightarrow$ Các đáp án A và B bị loại.

▪ Với $F(x) = \frac{1}{4}(3x - \frac{1}{4}\sin4x) + C$ thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{4}(3 - \cos4x) \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2} \neq \sin^4 0 + \cos^4 0 = 1$$

$\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận 1* chúng ta sử dụng *phép hạ bậc đơn* để đưa hàm số về dạng dễ lấy nguyên hàm.

▪ *Trong cách giải tự luận 2* chúng ta sử dụng *phép hạ bậc toàn cục* để đưa hàm số về dạng dễ lấy nguyên hàm.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử* chúng ta thực hiện từ trái qua phải. Tuy nhiên, với phép thử đó vì đáp án C đúng với giá trị x = 0 nên chuyển qua đáp án D để nhận xét được rằng đáp án này là sai. Từ đó, khẳng định việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn - *Các em học sinh cần ghi nhận ý tưởng này để sử dụng trong các phép thử mà ở đó việc biến đổi lượng giác về hàm số ban đầu là phức tạp.*

Bài 26. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ có dạng:

A. $\sqrt{1-x^2} + C$. B. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$. C. $x\sqrt{1-x^2} + C$. D. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Đặt x = cost, $0 < t < \pi$ suy ra:

$$dx = -\sin t.dt \text{ và } f(x).dx = -\frac{\sin t.dt}{\sin^3 t} = -\frac{dt}{\sin^2 t} = d(\cot t).$$

Khi đó: $\int f(x)dx = \int d(\cot t) = \cot t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Với $F(x) = \sqrt{1-x^2} + C$ thì:

$$f(x) = (\sqrt{1-x^2} + C)' = -\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \neq \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

- Với $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$ thì:

$$f(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C\right)' = \frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \Rightarrow \text{Đáp án B đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Chú ý: Trong bài tập trên sở dĩ ta có:

$$\sqrt{(1-x^2)^3} = \sin^3 t \text{ và } \cot t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

là bởi: $0 < t < \pi \Rightarrow \sin t > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\sin^2 t} = \sin t \\ \sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$

Bài 27. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (4x - 1)^3$ có dạng:

A. $\frac{1}{4}(4x - 1)^4 + C.$　　　　B. $\frac{1}{8}(4x - 1)^4 + C.$

C. $\frac{1}{16}(4x - 1)^4 + C.$　　　　D. $\frac{1}{32}(4x - 1)^4 + C.$

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đặt $t = 4x - 1$ suy ra: $dt = 4dx$ và $f(x).dx = \frac{1}{4}t^3dt$.

Khi đó:

$$\int f(x)dx = \frac{1}{4}\int t^3dt = \frac{1}{16}t^4 + C = \frac{1}{16}(4x - 1)^4 + C, \text{ ứng với đáp án C.}$$

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta biến đổi: $f(x) = 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1$.

Khi đó: $\int f(x)dx = \int(64x^3 - 48x^2 + 12x - 1)dx = 16x^4 - 16x^3 + 6x^2 - x + C$

$$= \frac{1}{16}(256x^4 - 256x^3 + 96x^2 - 16x + 1) + C - \frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{16}(4x - 1)^4 + C_0, \text{ ứng với đáp án C.}$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Với F(x) trong đáp án A thì: $f(x) = [\frac{1}{4}(4x - 1)^4 + C]' = 4(4x - 1)^3 \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

▪ Bởi các đáp án A, B, C, D chỉ khác nhau ở hệ số và giả thiết cho hệ số 1 (tức 16:16 = 2) nên ta loại bỏ tiếp được các đáp án B và D.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 28. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$ có dạng:

A. $\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C.$ B. $\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C.$

C. $\frac{2}{3}\sqrt{x^2+1} + C.$ D. $\frac{1}{3}\sqrt{x^2+1} + C.$

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ suy ra:

$$dt = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{xdx}{t} \Leftrightarrow xdx = tdt \text{ và } f(x).dx = 2t^2dt.$$

Khi đó: $\int f(x)dx = 2\int t^2dt = \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với F(x) trong đáp án A thì:

$$f(x) = \left[\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]' = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}.2x.(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

▪ Bởi các đáp án A, B chỉ khác nhau ở hệ số và giả thiết cho hệ số 2 nên việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 29. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^4x.\cos x$ có dạng:

A. $\frac{1}{2}\sin^5x + C.$ B. $\frac{1}{3}\sin^5x + C.$ C. $\frac{1}{4}\sin^5x + C.$ D. $\frac{1}{5}\sin^5x + C.$

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt $t = \sin x$, suy ra $dt = \cos x.dx$ và $f(x).dx = t^4dt$.

Khi đó: $\int f(x)dx = \int t^4dt = \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{5}\sin^5x + C$, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Ta có:

$(\sin^5x)' = 5\sin^4x.\cos x \Rightarrow$ cần hệ số $\frac{1}{5}$ để khử 5.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 30. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ có dạng:

A. $-\frac{1}{\sin x} + C.$ B. $-\frac{1}{\cos x} + C.$ C. $\frac{1}{\cos x} + C.$ D. $\frac{1}{\sin x} + C.$

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt t = cosx suy ra: dt = -sinx.dx và f(x).dx = $-\frac{dt}{t^2}$.

Khi đó: $\int f(x)dx = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với F(x) trong đáp án A thì:

$$f(x) = \left[-\frac{1}{\sin x} + C\right]' = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$ ⇒ Các đáp án A và D bị loại.

▪ Với F(x) trong đáp án B thì:

$$f(x) = \left[-\frac{1}{\cos x} + C\right]' = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$ ⇒ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 31. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x\sqrt{2\cos x - 1}$ có dạng:

A. $\frac{1}{3}\sqrt{2\cos x - 1} + C$.

B. $-\frac{1}{3}\sqrt{(2\cos x - 1)^3} + C$.

C. $\frac{1}{6}\sqrt{2\cos x - 1} + C$.

D. $-\frac{1}{6}\sqrt{(2\cos x - 1)^3} + C$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt $t = \sqrt{2\cos x - 1}$ suy ra:

$$dt = -\frac{\sin x.dx}{\sqrt{2\cos x - 1}} = -\frac{\sin x.dx}{t}$$ ⇔ sinx.dx = -tdt và f(x).dx = $-t^2dt$.

Khi đó: $\int f(x)dx = -\int t^2dt = -\frac{1}{3}t^3 + C = -\frac{1}{3}\sqrt{(2\cos x - 1)^3} + C$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với F(x) trong đáp án A thì:

$$f(x) = F'(x) = -\frac{\sin x}{3\sqrt{2\cos x - 1}}$$ ⇒ Các đáp án A và C bị loại.

▪ Với F(x) trong đáp án B thì:

$f(x) = F'(x) = \sin x\sqrt{2\cos x - 1}$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 32. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x.e^{x^2+1}$ có dạng:

A. $-xe^{x^2+1} + C$.　B. $-e^{x^2+1} + C$.　C. $e^{x^2+1} + C$.　D. $xe^{x^2+1} + C$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt $t = x^2 + 1$ suy ra: $dt = 2x.dx$ và $f(x).dx = e^t dt$.

Khi đó: $\int f(x)dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2+1} + C$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Với F(x) trong đáp án A thì:

$$f(x) = F'(x) = -(e^{x^2+1} + 2x^2 e^{x^2+1}) \Rightarrow \text{Các đáp án A và D bị loại.}$$

- Với F(x) trong đáp án B thì: $f(x) = F'(x) = -2xe^{x^2+1} \Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 33. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ có dạng:

A. $e^{\cot x} + C$. **B.** $e^{\tan x} + C$. **C.** $-e^{\tan x} + C$. **D.** $-e^{\cot x} + C$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt $t = \tan x$ suy ra: $dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ và $f(x).dx = e^t dt$.

Khi đó: $\int f(x)dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\tan x} + C$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Với F(x) trong đáp án A thì:

$$f(x) = F'(x) = -\frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x} \Rightarrow \text{Các đáp án A và D bị loại.}$$

- Với F(x) trong đáp án B thì:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}, \text{ đúng.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 34. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ có dạng:

A. $4\ln(e^x + 1) + C$. **B.** $3\ln(e^x + 1) + C$.

C. $2\ln(e^x + 1) + C$. **D.** $\ln(e^x + 1) + C$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt $t = e^x + 1$ suy ra $dt = e^x dx$ và $f(x).dx = \dfrac{dt}{t}$.

Khi đó: $\int f(x)dx = \int \dfrac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(e^x + 1) + C$, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá:* Ta có:

$$[\ln(e^x + 1)]' = \frac{e^x}{e^x + 1} \Rightarrow \text{Đáp án D là đúng đắn.}$$

Bài 35. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x.\ln x}$ có dạng:

A. lnx + C. B. ln(lnx) + C. C. -ln(lnx) + C. D. -lnx + C.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt t = lnx suy ra $dt = \frac{dx}{x}$ và $f(x).dx = \frac{dt}{t}$.

Khi đó: $\int f(x)dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln(\ln x) + C$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Với F(x) trong đáp án A thì:

  $f(x) = F'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow$ Các đáp án A và D bị loại.

- Với F(x) trong đáp án B thì:

  $f(x) = F'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x} = \frac{1}{x.\ln x}$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 36. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^x$ có dạng:

A. $x.e^x + C$. B. $x.e^x + e^x + C$. C. $x.e^x - e^x + C$. D. $x.e^x - C$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó: $\int f(x)dx = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + C$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Với F(x) trong đáp án A thì: $f(x) = F'(x) = e^x + x.e^x \Rightarrow$ Các đáp án A và D bị loại.
- Với F(x) trong đáp án B thì:

  $f(x) = F'(x) = e^x + x.e^x + e^x = 2e^x + x.e^x \Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 37. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.\ln x$ có dạng:

A. $x.\ln x - x + C$. B. $\frac{1}{2}x^2.\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$.

C. $x.\ln x + x + C$. D. $\frac{1}{2}x^2.\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$.

Khi đó:

$\int f(x)dx = \frac{1}{2}x^2.\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2.\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với F(x) trong đáp án A thì:

f(x) = F'(x) = lnx + 1 - 1 = lnx ⇒ Các đáp án A và C bị loại.

▪ Với F(x) trong đáp án B thì: f(x) = F'(x) = x.lnx + $\frac{1}{2}$x - $\frac{1}{2}$x = x.lnx, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 38. Họ nguyên hàm của hàm số f(x) = x.sinx có dạng:

A. x.sinx - cosx + C. B. x.sinx + cosx + C.

C. -x.cosx - sinx + C. D. -x.cosx + sinx + C.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Khi đó:

$\int f(x)dx$ = -x.cosx + ∫cosx.dx = -x.cosx + sinx + C, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với F(x) trong đáp án A thì:

f(x) = F'(x) = sinx + x.cosx + sinx = 2sinx + x.cosx ⇒ Đáp án A bị loại.

▪ Với F(x) trong đáp án B thì:

f(x) = F'(x) = sinx + x.cosx - sinx = x.cosx ⇒ Đáp án B bị loại.

▪ Với F(x) trong đáp án C thì:

f(x) = F'(x) = -cosx + x.sinx - cosx = -2cosx + x.sinx ⇒ Đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với F(x) trong đáp án D thì:

f(x) = F'(x) = -cosx + x.sinx + cosx = x.sinx, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp đánh giá*: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Để có được biểu thức x.sinx sau phép lấy đạo hàm thì F(x) phải chứa x.cosx, do đó các đáp án A và B bị loại.

▪ Với F(x) trong đáp án C thì:

f(x) = F'(x) = -cosx + x.sinx - cosx = -2cosx + x.sinx ⇒ Đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 39. Họ nguyên hàm của hàm số f(x) = x.cosx có dạng:

A. -x.sinx - cosx + C.
B. x.sinx + cosx + C.
C. -x.cosx - sinx + C.
D. x.cosx + sinx + C.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

Khi đó:

$\int f(x)dx$ = x.sinx - ∫sinx.dx = x.sinx + cosx + C, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với F(x) trong đáp án A thì:

f(x) = F'(x) = -sinx - x.cosx + sinx = -x.cosx ⇒ Đáp án A bị loại.

▪ Vì A và B chỉ khác nhau về dấu nên đáp án B là đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

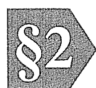
➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp đánh giá*: Ta lần lượt đánh giá:

▪ Để có được biểu thức x.cosx sau phép lấy đạo hàm thì F(x) phải chứa x.sinx, do đó các đáp án C và D bị loại.

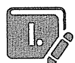
▪ Với F(x) trong đáp án A thì:

f(x) = F'(x) = -sinx - x.cosx + sinx = -x.cosx ⇒ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.



§2 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TÍCH PHÂN



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm tích phân

Định nghĩa: Cho hàm số f(x) *liên tục trên khoảng* I *và* a, b *là hai số bất kì thuộc* I. *Nếu* F(x) *là một nguyên hàm của* f(x) *thì hiệu số* F(b) - F(a) *được gọi là tích phân của* f(x) *từ* a *đến* b *và kí hiệu là* $\int_a^b f(x)dx$.

Ta có công thức Niutơn - Laipnit: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Chú ý: Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ chỉ phụ thuộc vào f, a, b mà không phụ thuộc vào cách ký hiệu biến số tích phân. Vì vậy, ta có thể viết:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots$$

Định lí: Cho hàm số y = f(x) *liên tục, không âm trên khoảng* I *và* a, b *là hai số thuộc* I (a < b). *Diện tích* S *của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số* y = f(x), *trục hành và hai đường thẳng* x = a, x = b *là:*

$$S = \int_a^b f(x).dx.$$

2. Các tính chất của tích phân

Giả sử các hàm số f(x), g(x) liên tục trên khoảng I và a, b, c là ba số bất kì thuộc I. Khi đó ta có các tính chất sau:

Tính chất 1: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Tính chất 2: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Tính chất 3: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, với $k \in R$.

Tính chất 4: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Tính chất 5: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

Tính chất 6: Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Tính chất 7: Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Tính chất 8: Nếu $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a; b]$ thì $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$.

Tính chất 9: Cho t biến thiên trên đoạn [a; b] thì $G(t) = \int_a^t f(x)dx$ là nguyên hàm của f(t) và G(a) = 0.

Để tính $\int_a^b f(x)dx$ ta sử dụng:

a. Bảng nguyên hàm các hàm số sơ cấp cơ bản.

b. Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thiết lập môi trường bằng cách ấn:

[MODE] [1]

Bước 2: Để tính $\int_a^b f(x)dx$, ta khai báo theo cú pháp:

[∫dx] < hàm số f(x) > [,] a [,] b [)] [=].

3. Phương pháp đổi biến số

Các phương pháp đổi biến số được sử dụng khá phổ biến trong việc tìm nguyên hàm. Cơ sở của phương pháp đổi biến số là định lí sau:

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)du, \text{ với } \alpha = u(a) \text{ và } \beta = u(b).$$

4. Phương pháp tích phân từng phần

Cơ sở của phương pháp tích phân từng phần là công sau:

$$\int_a^b u(x).v'(x).dx = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x).u'(x).dx. \quad (1)$$

Để sử dụng (1) trong việc tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ ta thực hiện các bước:

Bước 1: Biến đổi tích phân ban đầu về dạng:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x).f_2(x)dx$$

Bước 2: Đặt: $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du \\ v \end{cases}$

Bước 3: Khi đó: $I = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

Chú ý: Khi sử dụng phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân, chúng ta cần tuân thủ các nguyên tắc sau:

1. Lựa chọn phép đặt dv sao cho v được xác định một cách dễ dàng.

2. Tích phân $\int_a^b vdu$ được xác định một cách dễ dàng hơn so với I.

3. Chúng ta cần nhớ các dạng cơ bản sau:

Dạng 1: Tích phân $I = \int x^a.\ln x dx$, với $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ khi đó đặt $u = \ln x$.

Dạng 2: Tích phân $I = \int P(x)e^{ax}dx$ (hoặc $I = \int P(x)e^{ax}dx$) với P là một đa thức thuộc $\mathbb{R}[X]$ và $a \in \mathbb{R}^*$ khi đó đặt $u = P(x)$.

Dạng 3: Tích phân $I = \int P(x)\sin\alpha x dx$ (hoặc $\int P(x)\cos\alpha x dx$) với P là một đa thức thuộc $\mathbb{R}[X]$ và $a \in \mathbb{R}^*$ khi đó đặt $u = P(x)$.

Dạng 4: Tích phân $I = \int e^{ax}\cos(bx)dx$ (hoặc $\int e^{ax}\sin(bx)dx$) với a, $b \neq 0$ khi đó đặt $u = \cos(bx)$ (hoặc $u = \sin(bx)$).



II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Tích phân $\int_0^1 (2x+1)dx$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$\int_0^1 (2x+1)dx = (x^2+x)|_0^1 = 2$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx 2 ALPHA X + 1 , 0 , 1) = → 2

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Dựa theo tính chất 8, bằng cách lập luận:

$1 \leq 2x+1 \leq 3$, với $\forall x \in [0; 1] \Rightarrow 1 - 0 \leq \int_0^1 (2x+1)dx \leq 3(1-0)$

$\Leftrightarrow 1 < \int_0^1 (2x+1)dx < 3 \Rightarrow$ Các đáp án A, B và D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận,* chúng ta sử dụng bảng nguyên hàm các hàm số sơ cấp cơ bản và định nghĩa tích phân để tính.

- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx-570MS, chúng ta sử dụng chức năng tính tích phân của máy tính, điều này giúp giảm được thời gian. Tuy nhiên, các em học sinh cần lưu ý:

  - Với các đáp án lẻ thì cần tính gần đúng chúng để so sánh với kết quả nhận được từ máy tính.
  - Với các hàm số lượng giác thì cần thiết lập đơn vị đo tương ứng.

- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá,* chúng ta sử dụng tính chất 8 để loại trừ ngay được các đáp án B, C và D. Từ đó, khẳng định được việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Với bài toán này, việc sử dụng phương pháp đánh giá chỉ mang tính minh họa bởi phép tính tích phân quá đơn giản.

Bài 2. Tích phân $\int_0^{-1} x^3(x+1)dx$ bằng:

A. 0. B. $\frac{1}{20}$. C. $\frac{1}{10}$. D. $\frac{1}{5}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\int_0^{-1} x^3(x+1)dx = \int_0^{-1}(x^4+x^3)dx = \left(\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^{-1} = \frac{1}{20}$$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx ALPHA X ^ 3 (ALPHA X + 1) , 0 , (-) 1) = 0.05

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 3. Tích phân $\int_0^{4} x(\sqrt{x}-x^2)dx$ bằng:

A. $-\frac{156}{5}$. B. $-\frac{256}{5}$. C. $\frac{284}{5}$. D. $\frac{384}{5}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\int_0^{4} x(\sqrt{x}-x^2)dx = \int_0^{4}(x^{\frac{3}{2}}-x^3)dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^{4} = -\frac{256}{5}$$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx ALPHA X (√ ALPHA X – ALPHA X x^2) , 0 , 4)

= −51.2

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 4. Tích phân $\int_2^3 \frac{dx}{x}$ bằng:

A. $\ln\frac{3}{2}$. B. ln2. C. ln3. D. $\ln\frac{2}{3}$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có: $\int_2^3 \frac{dx}{x} = \left|\ln|x|\right|_2^3 = \ln3 - \ln2 = \ln\frac{3}{2}$, ứng với đáp án A.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx 1 $a^{b/c}$ ALPHA X , 3 , 5) = 0.4054

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Dựa theo tính chất 8, bằng cách lập luận:

$$\frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{2}, \text{ với } \forall x \in [2; 3] \Rightarrow \frac{1}{3}(3 - 2) \le \int_2^3 \frac{dx}{x} \le \frac{1}{2}(3 - 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < \int_2^3 \frac{dx}{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Các đáp án B, C và D bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 5. Tích phân $\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ bằng:

A. $\frac{25}{12}$. B. $\frac{275}{12}$. C. $-\frac{275}{12}$. D. $-\frac{25}{12}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_2^4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + 2x\right)\Bigg|_2^4 = \frac{275}{12}, \text{ ứng với đáp án B.}$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx (ALPHA X + 1 a b/c ALPHA X) x² , 2 , 4)

= 22.917

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Dựa theo tính chất 7, bằng cách lập luận:

$$x + \frac{1}{x} \ge 2,\ \text{với}\ \forall x \in [2; 4] \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \ge 4 \Rightarrow \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx \ge \int_2^4 4dx = 8$$

$\Rightarrow$ Các đáp án A, C và D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 6. Tích phân $\int_0^3 \sqrt{x+1}dx$ bằng:

A. 0. B. 2. C. $\frac{14}{3}$. D. $\frac{19}{3}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\int_0^3 \sqrt{x+1}dx = \int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{14}{3},\ \text{ứng với đáp án C.}$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx √ (ALPHA X + 1) , 0 , 3) = 4.6667

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Dựa theo tính chất 8, bằng cách lập luận:

$$1 \le \sqrt{x+1} \le 2,\ \text{với}\ \forall x \in [0; 3] \Rightarrow 1(3 - 0) \le \int_0^3 \sqrt{x+1}dx \le 2(3 - 0)$$

$$\Leftrightarrow 3 \le \int_0^3 \sqrt{x+1}dx \le 6 \Rightarrow \text{Các đáp án A, B và D bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 7. Tích phân $\int_0^1 (e^x + 1)dx$ bằng:

A. e. B. 2e. C. 2e + 1. D. e + 1.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\int_0^1 (e^x+1)dx = (e^x+x)|_0^1 = e+1-1 = e$$, ứng với đáp án A.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx ALPHA e ^ ALPHA X + 1 , 0 , 1) = → 2.7183

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Dựa theo tính chất 8, bằng cách lập luận:

$$2 \le e^x + 1 \le e + 1, \text{ với } \forall x \in [0; 1] \Rightarrow 2(1-0) \le \int_0^1 (e^x+1)dx \le (e+1)(1-0)$$

$$\Leftrightarrow 2 < \int_0^1 (e^x+1)dx < e+1 \Rightarrow$$ Các đáp án B, C và D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 8. Tích phân $\int_0^1 \left(e^{2x} + \frac{3}{x+1}\right)dx$ bằng:

A. $\frac{e^2}{2} + 3\ln 2 + \frac{1}{2}$

B. $\frac{e^2}{2} + 3\ln 2 - \frac{1}{2}$.

C. $\frac{e^2}{2} - 3\ln 2 + \frac{1}{2}$

D. $\frac{e^2}{2} - 3\ln 2 - \frac{1}{2}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\int_0^1 \left(e^{2x} + \frac{3}{x+1}\right)dx = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + 3\ln|x+1|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{e^2}{2} + 3\ln 2 - \frac{1}{2}$$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS* - Học sinh tự thực hiện.

Bài 9. Tích phân $\int_0^{\pi/4} (\sin x + \cos x)dx$ bằng:

A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{2}$.

C. 1.

D. 0.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Ta có:

$$\int_0^{\pi/4} (\sin x + \cos x)dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = 1$$, ứng với đáp án C.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta có:

$$\int_0^{\pi/4}(\sin x+\cos x)dx = (-\cos x+\sin x)|_0^{\pi/4} = 1$$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

MODE MODE MODE MODE 2 *(Thiết lập đơn vị đo rad)*

∫dx sin ALPHA X + cos ALPHA X ,

0 , SHIFT π a b/c 4) = → 1

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 10. Tích phân $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\sin x-\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx$ bằng:

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\sin x-\frac{4}{\sin^2 x}\right)dx = \left(-\cos x+4\cot x\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 8$$, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

MODE MODE MODE MODE 2 *(Thiết lập đơn vị đo rad)*

∫dx (sin ALPHA X – 4 ÷ (sin ALPHA X) x² ,

(–) SHIFT π a b/c 4 , SHIFT π a b/c 4) = → 8

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 11. Tích phân $\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$ bằng:

A. 12. B. 10. C. 8. D. 6.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có: $\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \int_0^{16}\frac{\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)dx}{x+9-x} = \frac{1}{9}\int_0^{16}\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right)dx$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{16}$$ = 12, ứng với đáp án A.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx 1 ÷ (√ (ALPHA X + 9) − √ ALPHA X) , 0 , 16) = 12

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 12. Tích phân $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$ bằng:

A. 0. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Vì qua x = 0 hàm số y = x đổi dấu từ - sang + nên:

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{2} |x|\,dx = -\int_{-1}^{0} x.dx + \int_{0}^{2} x.dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2} = \frac{5}{2}$$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx √ (ALPHA X x^2) , (−) 1 , 2) = 2.5

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 13. Tích phân $\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$ bằng:

A. $1-\frac{1}{e}$. B. $2-\frac{2}{e}$. C. $2+\frac{2}{e}$. D. $1+\frac{1}{e}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Vì qua x = 1 hàm số y = lnx đổi dấu từ - sang + nên:

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx = \int_{1/e}^{1} |\ln x|\,dx + \int_{1}^{e} |\ln x|\,dx = -\int_{1/e}^{1} \ln x.dx + \int_{1}^{e} \ln x.dx$$

$$= -x(\ln x - 1)\Big|_{1/e}^{1} + x(\ln x - 1)\Big|_{1}^{e} = 2 - \frac{2}{e}$$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx √ (ln ALPHA X) x^2 , 1 $a^{b/c}$ ALPHA e , ALPHA e) = 1.2642

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 14. Tích phân $\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx$ bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Vì qua $x = \frac{\pi}{2}$ hàm số y = cosx đổi dấu từ + sang - nên:

$$\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx = \int_0^{\pi/2} |\cos x|\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\cos x|\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x.dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x.dx$$

$= \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* bằng cách thực hiện theo thứ tự:

[MODE] [1]

[MODE] [MODE] [MODE] [MODE] [2] (*Thiết lập đơn vị đo rad*)

[∫dx] [√] [(] [cos] [ALPHA] [X] [)] [x^2] [,]

0 [;] [SHIFT] π [$a^{b/c}$] 2 [)] [=] [2]

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 15. Biết $\int_1^2 f(x)dx = -4$, $\int_1^5 f(x)dx = 6$, giá trị của $\int_2^5 f(x)dx$ bằng:

A. -4. B. 6. C. 2. D. 10.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx \Leftrightarrow \int_2^5 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = 10$, ứng với đáp án D.

Bài 16. Biết $\int_0^3 f(z)dz = 3$, $\int_0^4 f(x)dx = 7$, giá trị của $\int_3^4 f(t)dt$ bằng:

A. -4. B. -10. C. 10. D. 4.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = \int_0^3 f(z)dz + \int_3^4 f(t)dt$$

$\Leftrightarrow \int_3^4 f(t)dt = \int_0^4 f(x)dx - \int_0^3 f(z)dz = 7 - 3 = 4$, ứng với đáp án D.

Bài 17. Biết $\int_0^b (x-1)dx = 0$, khi đó b nhận giá trị bằng:

A. b = 0 hoặc b = 1. B. b = 0 hoặc b = 2.

C. b = 1 hoặc b = 3. D. b = 2 hoặc b = 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$0 = \int_0^b (x-1)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_0^b = \frac{1}{2}b^2 - b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=2 \end{array}\right.$$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Dựa theo tính chất 1, chúng ta thấy ngay b = 0 thỏa mãn điều kiện đầu bài. Do đó, các đáp án C và D bị loại.

▪ Với b = 1, ta được: $\int_0^1 (x-1)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Ta lần lượt có:

▪ Dựa theo tính chất 1, chúng ta thấy ngay b = 0 thỏa mãn điều kiện đầu bài. Do đó, các đáp án C và D bị loại.

▪ Với b = 1, ta ấn:

MODE 1

∫dx ALPHA X − 1 , 0 ,) = → −0.5

⇒ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Ta lần lượt có:

▪ Với b = 3, ta ấn:

MODE 1

∫dx ALPHA X − 1 , 0 , 3) = → 1.5

⇒ Các đáp án C và D bị loại.

▪ Với b = 2, ta sử dụng dấu con trỏ trên máy tính để sửa 3 thành 2 rồi ấn:

= → 0

⇒ b = 2 thỏa mãn ⇒ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 18. Biết $\int_0^a (3x^2 - 4x - 9)dx = -18$, khi đó a nhận giá trị bằng:

A. a = -3. B. a = 2. C. a = 3. D. Cả A, B, C.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$-18 = \int_0^a (3x^2 - 4x - 9)dx = \left(x^3 - 2x^2 - 9x\right)\Big|_0^a = a^3 - 2a^2 - 9a$$

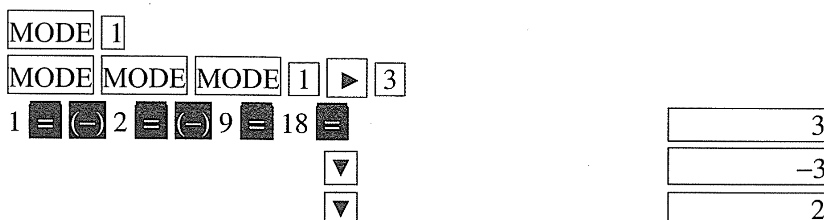
$$\Leftrightarrow a^3 - 2a^2 - 9a + 18 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a^2-9) = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ hoặc } a = \pm 3,$$

Vậy, với a = 2 hoặc a = ±3 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Ta có:

$$-18 = \int_0^a (3x^2 - 4x - 9)dx = \left(x^3 - 2x^2 - 9x\right)\Big|_0^a = a^3 - 2a^2 - 9a$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 2a^2 - 9a + 18 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ hoặc } a = \pm 3, \text{ bằng cách ấn:}$$



Vậy, với a = 2 hoặc a = ±3 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS* - Bạn đọc tự thực hiện tương tự bài 17.

☞ Chú ý: Các bài tiếp theo minh họa một số phương pháp tính tích phân (phương pháp phân tích, phương pháp đổi biến và phương pháp tính tích phân từng phần).

Bài 19. Tích phân $\int_1^2 \frac{3dx}{x^2 - 3x}$ bằng:

A. -ln2. B. -2ln2. C. 2ln2. D. ln2.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có: $\frac{3}{x^2 - 3x} = \frac{3}{x(x-3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x} = \frac{(A+B)x - 3B}{x(x-3)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -3B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{x^2 - 3x} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}.$$

Khi đó:

$$\int_1^2 \frac{3dx}{x^2 - 3x} = \int_1^2 \frac{dx}{x-3} - \int_1^2 \frac{dx}{x} = (\ln|x-3| - \ln|x|)\Big|_1^2 = -2\ln 2, \text{ ứng với đáp án B.}$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:*
Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1
∫dx 3 ÷ (ALPHA X x² – 3 ALPHA X)
, 1 , 2) =   –1.3863

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 20. Tích phân $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x.\cos 2x.dx$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$.   B. $\frac{2}{3}$.   C. 1.   D. $\frac{4}{3}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x.\cos 2x.dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 3x + \cos x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \sin x\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3}, \text{ ứng với đáp án B.}$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:*
Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1
MODE MODE MODE MODE 2   *(Thiết lập đơn vị đo rad)*
∫dx cos ALPHA X × cos (2 ALPHA X) ,
(–) SHIFT π a b/c 2 , SHIFT π a b/c 2) =   0.6666

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 21. Tích phân $\int_{0}^{\pi/12} \cos^2 x.dx$ bằng:

A. $\frac{\pi + 3}{24}$.   B. $\frac{\pi + 3}{12}$.   C. $\frac{\pi - 3}{12}$.   D. $\frac{\pi - 3}{24}$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$$\int_{0}^{\pi/12} \cos^2 x.dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/12} (1 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{0}^{\pi/12} = \frac{\pi + 3}{24}.$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

MODE MODE MODE MODE 2 (*Thiết lập đơn vị đo rad*)

∫dx (cos ALPHA X) x² , 0 , SHIFT π a b/c 12) = 0.2559

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 22. Tích phân $\int_{-1}^{1}(3x+2)^4dx$ bằng:

A. $\frac{642}{5}$. B. $\frac{842}{5}$. C. $\frac{942}{5}$. D. $\frac{1042}{5}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đặt t = 3x + 2 suy ra dt = 3dx.

Đổi cận:

- Với x = -1 thì t = -1
- Với x = 1 thì t = 5.

Khi đó: $\int_{-1}^{1}(3x+2)^4dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{5}t^4dt = \frac{1}{15}t^5\Big|_{-1}^{5} = \frac{1042}{5}$, ứng với đáp án D.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta viết lại tích phân dưới dạng:

$$\int_{-1}^{1}(3x+2)^4dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(3x+2)^4d(3x+2) = \frac{1}{15}(3x+2)^5\Big|_{-1}^{1} = \frac{1042}{5}$$, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx (3 ALPHA X + 2) ^ 4 , (–) 1 , 1) = 208.4

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 23. Tích phân $\int_{-1}^{1}\frac{2x.dx}{x^2+1}$ bằng:

A. 0. B. -2. C. 2. D. 4.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đặt t = x^2 + 1 suy ra dt = 2xdx.

Đổi cận:

- Với x = -1 thì t = 2
- Với x = 1 thì t = 2.

Khi đó: $\int_{-1}^{1}\frac{2x.dx}{x^2+1}=\int_{2}^{2}\frac{dt}{t}=0$, (vì hai cận bằng nhau), ứng với đáp án A.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta viết lại tích phân dưới dạng:

$$\int_{-1}^{1}\frac{2x.dx}{x^2+1}=\int_{-1}^{1}\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\left(\ln|x^2+1|\right)\Big|_{-1}^{1}=0,$$ ứng với đáp án A.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx 2 ALPHA X ÷ (ALPHA X x² + 1) , (–) 1 , 1) = 0

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 24. Tích phân $\int_{-1}^{1/2}\frac{(2x+1)dx}{x^2+x-2}$ bằng:

A. -ln8. B. $\ln\frac{3}{8}$. C. $\ln\frac{5}{8}$. D. $\ln\frac{7}{8}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt $t = x^2 + x - 2$ suy ra $dt = (2x + 1)dx$.

Đổi cận:

- Với $x = -1$ thì $t = -2$
- Với $x=\frac{1}{2}$ thì $t=-\frac{5}{4}$.

Khi đó: $\int_{-1}^{1/2}\frac{(2x+1)dx}{x^2+x-2}=\int_{-2}^{-5/4}\frac{dt}{t}=\left(\ln|t|\right)\Big|_{-2}^{-5/4}=\ln\frac{5}{8}$, ứng với đáp án C.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta viết lại tích phân dưới dạng:

$$\int_{-1}^{1/2}\frac{(2x+1)dx}{x^2+x-2}=\int_{-1}^{1/2}\frac{d(x^2+x-2)}{x^2+x-2}=\left(\ln|x^2+x-2|\right)\Big|_{-1}^{1/2}=\ln\frac{5}{8},$$ ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx (2 ALPHA X + 1) ÷ (ALPHA X x² + ALPHA X – 2)

, (–) 1 , 1 a b/c 2 = –0.47

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 25. Tích phân $\int_{0}^{3}x\sqrt{x^2+16}dx$ bằng:

A. $\frac{64}{3}$. B. $\frac{61}{3}$. C. $\frac{58}{3}$. D. $\frac{55}{3}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đặt $t = \sqrt{x^2+16}$ suy ra $dt = \dfrac{x.dx}{\sqrt{x^2+16}}$ hay x.dx = t.dt.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 4
- Với x = 3 thì t = 5

Khi đó:

$$\int_0^3 x\sqrt{x^2+16}dx = \int_4^5 t^2.dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_4^5 = \frac{61}{3}$$, ứng với đáp án B.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta viết lại tích phân dưới dạng:

$$\int_0^3 x\sqrt{x^2+16}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 (x^2+16)^{\frac{1}{2}}d(x^2+16) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}\left(x^2+16\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{61}{3}$$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

∫dx ALPHA X √ (ALPHA X x² + 16) , 0 , 3 = 20.333

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 26. Tích phân $\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos x.dx}{1+\sin x}$ bằng:

A. 4ln2. B. 3ln2. C. 2ln2. D. ln2.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đặt t = 1 + sinx suy ra dt = cosx.dx.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 1
- Với $x = \dfrac{\pi}{2}$ thì t = 2.

Khi đó:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x.dx}{1+\sin x} = \int_1^2\frac{dt}{t} = \left(\ln|t|\right)\Big|_1^2 = \ln 2$$, ứng với đáp án D.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta viết lại tích phân dưới dạng:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x.dx}{1+\sin x} = \int_0^{\pi/2}\frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x} = \left(\ln|1+\sin x|\right)\Big|_0^{\pi/2} = \ln 2$$, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

MODE MODE MODE MODE 2 (*Thiết lập đơn vị đo rad*)

∫dx cos ALPHA X ÷ (1 + sin ALPHA X)

, 0 , SHIFT π a b/c 1) = 0.6931

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 27. Tích phân $\int_0^{\pi/12} \frac{dx}{(1 + \tan 3x)\cos^2 3x}$ bằng:

A. ln2. B. $\frac{\ln 2}{2}$. C. $\frac{\ln 2}{3}$. D. $\frac{\ln 2}{4}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đặt t = 1 + tan3x suy ra $dt = \frac{3dx}{\cos^2 3x}$.

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 1
- Với $x = \frac{\pi}{12}$ thì t = 2.

Khi đó: $\int_0^{\pi/12} \frac{dx}{(1 + \tan 3x)\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}(\ln|t|)\Big|_1^2 = \frac{\ln 2}{3}$, ứng với đáp án C.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta viết lại tích phân dưới dạng:

$$\int_0^{\pi/12} \frac{dx}{(1 + \tan 3x)\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/12} \frac{d(1 + \tan 3x)}{1 + \tan 3x} = \frac{1}{3}(\ln|1 + \tan 3x|)\Big|_0^{\pi/12} = \frac{\ln 2}{3},$$

ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

MODE MODE MODE MODE 2 (*Thiết lập đơn vị đo rad*)

∫dx 1 ÷ ((1 + tan (3 ALPHA X))

× (cos (3 ALPHA X)) x²)

, 0 , SHIFT π a b/c 12) = 0.2310

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 28. Tích phân $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x}$ bằng:

A. $\frac{\ln 3}{4}$. B. $\frac{\ln 3}{3}$. C. $\frac{\ln 3}{2}$. D. ln3.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đặt t = tanx suy ra; $dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$,

$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2t}{1+t^2}$.

Đổi cận:

- Với $x = \frac{\pi}{4}$ thì t = 1
- Với $x = \frac{\pi}{3}$ thì $t = \sqrt{3}$.

Khi đó:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\left(\ln|t|\right)\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\ln\sqrt{3}}{2} = \frac{\ln 3}{4}$$, ứng với đáp án A.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta viết lại tích phân dưới dạng:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\tan x.\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d(\tan x)}{\tan x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|\tan x|\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\ln\sqrt{3}}{2} = \frac{\ln 3}{4}$$, ứng với đáp án A.

➢ *Lời giải tự luận 3:* Ta viết lại tích phân dưới dạng:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)dx}{\sin x.\cos x} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|\sin x| - \ln|\cos x|\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\ln\sqrt{3}}{2} = \frac{\ln 3}{4}$$, ứng với đáp án A.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:*
Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

MODE MODE MODE MODE 2 *(Thiết lập đơn vị đo rad)*

∫dx 1 ÷ sin (2 ALPHA X)

, SHIFT π a b/c 4 , SHIFT π a b/c 3) = 0.2746

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 29. Tích phân $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\cos 2x}$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.   B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.   C. $\frac{1}{2}$.   D. 0.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Đặt t = tanx suy ra; $dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$,

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow 1 + \cos 2x = 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Đổi cận:

- Với x = 0 thì t = 0
- Với $x = \frac{\pi}{4}$ thì t = 1.

Khi đó: $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\cos 2x} = \frac{1}{2}\int_0^1 dt = \frac{1}{2}t\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$, ứng với đáp án C.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta viết lại tích phân dưới dạng:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+\cos 2x} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} d(\tan x) = \frac{1}{2}(\tan x)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2},$$ ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:*

Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1

MODE MODE MODE MODE 2   *(Thiết lập đơn vị đo rad)*

∫dx 1 ÷ (1 + cos (2 ALPHA X))

, 0 , SHIFT π a b/c 4) =   0.5

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 30. Tích phân $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x.\sin^2 x dx$ bằng:

A. $\frac{1}{15}$.   B. $\frac{2}{15}$.   C. $\frac{1}{5}$.   D. $\frac{4}{15}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta biến đổi:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x.\sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x).\sin^2 x.\cos x dx = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x - \sin^4 x).\cos x dx.$$

Đặt t = sinx, khi đó dt = cosxdx.

Đổi cận:

- $x = 0 \Rightarrow t = 0$
- $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$

Khi đó: $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x.\sin^2 x dx = \int_0^1 (t^2 - t^4)dt = (\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5)\Big|_0^1 = \frac{2}{15}$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1
MODE MODE MODE MODE 2 *(Thiết lập đơn vị đo rad)*
∫dx (cos ALPHA X) ^ 3 × (sin ALPHA X) x^2
, 0 , SHIFT π $a^{b/c}$ 2) = 0.1333

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận* chúng ta thấy nó có dạng: R(sinx, -cosx) = -R(sinx, cosx). và theo lý thuyết thì phép đổi biến là t = sinx.

Tuy nhiên, bài toán trên còn có thể được giải bằng việc biến đổi biểu thức $\cos^3x.\sin^2x$ về dạng tổng của các hàm lượng giác, cụ thể:

$$\cos^3x.\sin^2x = \frac{1}{4}\sin^2 2x.\cos x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x).\cos x$$

$$= \frac{1}{8}(\cos x - \cos 4x.\cos x) = \frac{1}{8}[\cos x - \frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 3x)]$$

$$= \frac{1}{16}(2\cos x - \cos 5x - \cos 3x).$$

- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử với máy tính CASIO fx-570MS*, các em học sinh nhớ rằng cần phải có động tác thiết lập đơn vị đo phù hợp.

Bài 31. Tích phân $\int_1^e 2x.\ln x.dx$ bằng:

A. $\frac{1}{2}(e^2 + 1)$. B. $\frac{1}{2}(e^2 + 2)$. C. $\frac{1}{2}(e^2 - 2)$. D. $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = 2x.dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x^2 \end{cases}$

Khi đó: $\int_1^e 2x.\ln x.dx = x^2.\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x.dx = e^2 - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^e = \frac{1}{2}(e^2 + 1)$, ứng với đáp án A.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1
∫dx 2 ALPHA X ln ALPHA X , 1 , ALPHA e = 4.1945

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 32. Tích phân $\int_0^1 xe^x dx$ bằng:

A. e. B. e - 1. C. 1. D. 0.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Khi đó: $I = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Với $x \in [[0; 1]$, ta lần lượt đánh giá:

$xe^x \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 xe^x dx > 0 \Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

$xe^x < e^x \Rightarrow \int_0^1 xe^x dx < \int_0^1 e^x.dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1 \Rightarrow$ Các đáp án A và B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE 1
∫dx ALPHA X × SHIFT e^x ALPHA X , 0 , 1) = 1

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 33. Tích phân $I = \int_0^{\pi/3} x.\cos x dx$ bằng:

A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$. B. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} - 2$. C. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} + 2$. D. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

Khi đó: $I = x.\sin x\Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \sin x dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \cos x\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$, ứng với đáp án A.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép đánh giá*: Với $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, ta lần lượt đánh giá:

$x.\cos x \geq 0 \Rightarrow \int_0^{\pi/3} x.\cos x dx > 0 \Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

$x.\cos x \leq x \Rightarrow \int_0^{\pi/3} x.\cos x dx < \int_0^{\pi/3} x.dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi/3} = \frac{\pi^2}{18} \approx 0.5483$

$\Rightarrow$ Các đáp án C và D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử*: Sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS, bằng cách thực hiện theo thứ tự:

[MODE] [1]

[∫dx] [ALPHA] [X] [×] [cos] [ALPHA] [X]

[,] 0 [,] [SHIFT] π [a b/c] 3 [)] [=] [0.4069]

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

PHẦN IV SỐ PHỨC

§1 SỐ PHỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm số phức

Định nghĩa 1: Một số phức là một biểu thức dạng $a + bi$, *trong đó* a, b *là các số thực và số i thỏa mãn* $i^2 = -1$. Kí hiệu số phức đó là z và viết $z = a + bi$. i *được gọi là đơn vị ảo,* a *được gọi là phần thực và* b *được gọi là phần ảo của số phức* $z = a + bi$.

Chú ý:

1. Mọi số thực a được coi là một số phức có phần ảo bằng 0, tức là $z = a + 0.i, a \in \mathbb{R}$.

2. Số phức có phần thực bằng 0 được gọi là *số ảo* (còn gọi là thuần ảo): $z = 0 + bi$ $(b \in \mathbb{R})$; $i = 0 + 1i = 1i$.

Định nghĩa 2: Hai số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $z' = a' + b'i$ $(a', b' \in \mathbb{R})$ *bằng nhau nếu và chỉ nếu*: $a = a'$, $b = b'$.

Khi đó, ta viết $z = z'$.

2. Biểu diễn hình học số phức

Mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$. Khi đó, ta thường viết $M(a + bi)$ hay $M(z)$. Gốc O biểu diễn số 0.

Mặt phẳng tọa độ với việc biểu diễn số phức được gọi là *mặt phẳng phức.*

- Trục Ox gọi là trục thực.
- Trục Oy gọi là trục ảo.

3. Phép cộng và phép trừ số phức

Định nghĩa 3: Tổng của hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ $(a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R})$ *là số phức* $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Như vậy, để cộng hai số phức, ta cộng các phần thực với nhau, cộng các phần ảo với nhau.

Tính chất của phép cộng số phức

1. (*Tính chất kết hợp*): $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

2. (*Tính chất giao hoán*): $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

3. (*Cộng với 0*): $z + 0 = 0 + z = z$ với mọi $z \in \mathbb{C}$.

4. Với mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, nếu kí hiệu số phức $-a - bi$ là $-z$ thì ta có:

$$z + (-z) = -z + z = 0.$$

$-z$ được gọi là số đối của số phức z.

Định nghĩa 4: Hiệu của hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ $(a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R})$ *là tổng của* z_1 với $-z_2$, tức là:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Ý nghĩa hình học của phép cộng và phép trừ số phức

Mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm M(a; b) cũng có nghĩa là vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Khi đó, nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ theo thứ tự biểu diễn số phức z_1, z_2 thì:

- $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ biểu diễn số phức $z_1 + z_2$.
- $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$ biểu diễn số phức $z_1 - z_2$.

4. Phép nhân số phức

Định nghĩa 5: Tích của hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ $(a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R})$ *là số phức*

$$z_1.z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)i.$$

Từ định nghĩa, ta có:

- Với mọi số thực k, và mọi số phức $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$:

  $k(a + bi) = ka + kbi.$

- $0z = 0$ với mọi số phức z.

Tính chất của phép nhân số phức

1. (*Tính chất giao hoán*): $z_1z_2 = z_2z_1$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

2. (*Tính chất kết hợp*): $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

3. (*Nhân với 1*): $1.z = z.1 = z$ với mọi $z \in \mathbb{C}$

4. *Tính chất phân phối* (của phép nhân đối với phép cộng):

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 \text{ với mọi } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

5. Số phức liên hợp và môdun của số phức

Định nghĩa 6: Số phức liên hợp của $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ *là* $a - bi$ *và được kí hiệu bởi* $\overline{z}$.

Như vậy, ta có:

$$\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi.$$

Nhận xét: Từ định nghĩa ta thấy:

1. Số phức liên hợp của $\overline{z}$ lại là z, tức là $\overline{\overline{z}} = z$. Vì thế người ta còn nói z và $\overline{z}$ là hai số phức liên hợp với nhau.

2. Số phức liên hợp khi và chỉ khi các điểm biểu diễn của chúng đối xứng nhau qua trục Ox.

Tính chất

1. Với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\ ;\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

2. Với mọi số phức z, số $z.\overline{z}$ luôn là một số thực, và nếu $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì:

$$z.\overline{z} = a^2 + b^2.$$

Định nghĩa 7: Môđun của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ *là số thực không âm* $\sqrt{a^2 + b^2}$ *và được kí hiệu là* $|z|$.

Như vậy, nếu $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ thì:

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nhận xét:

1. Nếu z là số thực thì môđun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.

2. $z = 0$ khi và chỉ khi $|z| = 0$.

6. Phép chia cho số phức khác 0

Định nghĩa 8: Số nghịch đảo của số phức z khác 0 là số $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

Thương $\frac{z'}{z}$ *của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 là tích của z' với số phức nghịch đảo của z, tức là* $\frac{z'}{z} = z'.z^{-1}$.

Như vậy, nếu $z \neq 0$ thì:

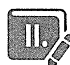
$$\frac{z'}{z} = \frac{z'.\overline{z}}{|z|^2}.$$

Chú ý: Có thể viết $\frac{z'}{z} = \frac{z'.\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z'.\overline{z}}{z.\overline{z}}$ nên để tính $\frac{z'}{z}$ ta chỉ việc nhân cả tử và mẫu số với $\overline{z}$ và để ý rằng $z\overline{z} = |z|^2$.

Nhận xét:

1. Với $z \neq 0$, ta có $\frac{1}{z} = 1.z^{-1} = z^{-1}$.

2. Thương $\frac{z'}{z}$ là số phức w sao cho zw = z'. Từ đó, có thể nói phép chia (cho số phức khác 0) là phép toán ngược của phép nhân.

 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Phần thực của số phức $z = \frac{5}{3}i$ là:

A. 0. B. $\frac{5}{3}$. C. 5. D. i.

Đáp số trắc nghiệm A.

Bài 2. Phần thực của z = 2i là:

A. 2. B. 2i. C. 0. D. 1.

Đáp số trắc nghiệm C.

Bài 3. Phần ảo của z = −2i là:

A. −2. B. −2i. C. 0. D. −1.

Đáp số trắc nghiệm A.

Bài 4. Môdun của số phức z = -3 + 4i bằng:

A. 1. B. 2. C. $\sqrt{7}$. D. 5.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, ứng với đáp án D.

Bài 5. Môđun của 1 − 2i bằng:

A. 3. B. $\sqrt{5}$, C. 2. D. 1.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$|z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$, ứng với đáp án B.

Bài 6. Môđun của −2iz bằng:

A. $-2|z|$. B. $\sqrt{2}z$. C. $2|z|$. D. 2.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Giả sử z = a + bi, khi đó:

$-2iz = -2i(a + bi) = 2b - 2ai \Rightarrow$

$|-2iz| = \sqrt{(2b)^2 + (-2a)^2} = 2\sqrt{b^2 + a^2} = 2|z|$, ứng với đáp án C.

Bài 7. Số $z + \bar{z}$ là:

A. Số thực. B. Số ảo. C. 0. D. 2.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Giả sử z = a + bi, khi đó:

$\bar{z} = a - bi \Rightarrow z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$, là số thực.

Bài 8. Số $z - \bar{z}$ là:

A. Số thực. B. Số ảo. C. 0. D. 2i.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Giả sử z = a + bi, khi đó:

$\bar{z} = a - bi \Rightarrow z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$, là số ảo.

Bài 9. Số i + (2 – 4i) – (3 – 2i) có:

A. Phần thực bằng 1 và phần ảo bằng -1.

B. Phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 1.

C. Phần thực bằng -1 và phần ảo bằng 1.

D. Phần thực bằng -1 và phần ảo bằng -1.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$i + (2 - 4i) - (3 - 2i) = -1 - i$, ứng với đáp án D.

Bài 10. Số $(\sqrt{2} + 3i)^2$ bằng:

A. $-7 + 6\sqrt{2}i$. B. $-7 - 6\sqrt{2}i$. C. $7 + 6\sqrt{2}i$. D. $7 - 6\sqrt{2}i$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$(\sqrt{2} + 3i)^2 = -7 + 6\sqrt{2}i$, ứng với đáp án A.

Bài 11. Số $\frac{1}{1+i}$ bằng:

A. $1 + i$.   B. $\frac{1}{2}(1 - i)$.   C. $1 - i$.   D. i.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1^2+1^2}.\overline{1+i} = \frac{1}{2}.(1-i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \text{ ứng với đáp án B.}$$

Bài 12. Số $\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ bằng:

A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.   B. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.   C. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.   D. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.\overline{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ ứng với đáp án A.}$$

Bài 13. Số $\frac{3-4i}{4-i}$ bằng:

A. $-\frac{16}{17} + \frac{13}{17}i$.   B. $\frac{16}{17} + \frac{13}{17}i$.   C. $\frac{16}{17} - \frac{13}{17}i$.   D. $-\frac{16}{17} - \frac{13}{17}i$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\frac{3-4i}{4-i} = \frac{(3-4i).\overline{4-i}}{4^2+1^2} = \frac{1}{17}(3-4i)(4+i) = \frac{16}{17} - \frac{13}{17}i, \text{ ứng với đáp án C.}$$

Bài 14. Cho $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, khi đó $\frac{1}{z}$ bằng:

A. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.   B. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.   C. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.   D. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.\overline{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ ứng với đáp án D.}$$

Bài 15. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn $|z - i| = 1$ là:

A. Đường tròn tâm I(0; 1) bán kính R = 1.

B. Đường tròn tâm I(0; 1) bán kính R = 2.

C. Đường tròn tâm I(1; 0) bán kính R = 2.

D. Đường tròn tâm I(1; 0) bán kính R = 1.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Với số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễm bởi điểm M(x; y).

Ta có:

$$1 = |z - i| = |x + yi - i| = |x + (y - 1)i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc đường tròn tâm I(0; 1) bán kính R = 1.

Bài 16. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$ là:

A. $6x + 8y - 25 = 0$.

B. $3x + 4y - 12 = 0$.

C. $6x + 8y + 25 = 0$.

D. $3x + 4y + 12 = 0$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Với số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễm bởi điểm M(x; y).

Ta có:

$$|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$$

$$\Leftrightarrow |x + yi| = |\overline{x + yi} - 3 + 4i| = |x - yi - 3 + 4i| = |x - 3 + (4 - y)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (4-y)^2} \Leftrightarrow 6x + 8y - 25 = 0.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc đường thẳng (d): $6x + 8y - 25 = 0$.

Bài 17. Số $z^2 + (\bar{z})^2$ là:

A. Số thực.

B. Số ảo.

C. 0.

D. 2i.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Với số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có:

$$z^2 + (\bar{z})^2 = (a + bi)^2 + \left(\overline{a + bi}\right)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi + (a^2 - b^2) - 2abi = 2(a^2 - b^2).$$

Vậy, số $z^2 + (\bar{z})^2$ là một số thực.

Bài 18. Số $\dfrac{z-\overline{z}}{z^3+\left(\overline{z}\right)^3}$ là:

A. Số thực. B. Số ảo. C. i. D. 2.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Với số phức z = a + bi (a, b∈ ℝ), ta có:

$$\frac{z-\overline{z}}{z^3+\left(\overline{z}\right)^3}=\frac{(a+bi)-\overline{a+bi}}{(a+bi)^3+\left(\overline{a+bi}\right)^3}=\frac{2bi}{2(a^3-3ab^2)}=\frac{b}{a^3-3ab^2}i.$$

Vậy, số $\dfrac{z-\overline{z}}{z^3+\left(\overline{z}\right)^3}$ là một số ảo.

Bài 19. Số $\dfrac{z^2-\left(\overline{z}\right)^2}{1+z\overline{z}}$ là:

A. Số thực. B. Số ảo. C. 0. D. -2i.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Với số phức z = a + bi (a, b∈ ℝ), ta có:

$$\frac{z^2-\left(\overline{z}\right)^2}{1+z\overline{z}}=\frac{(a+bi)^2-\left(\overline{a+bi}\right)^2}{1+(a+bi)\overline{(a+bi)}}=\frac{(a+bi)^2-(a-bi)^2}{1+(a+bi)(a-bi)}=\frac{4ab}{1+a^2+b^2}i.$$

Vậy, số $\dfrac{z^2-\left(\overline{z}\right)^2}{1+z\overline{z}}$ là một số ảo.

Bài 20. Phương trình iz + 2 – i = 0 (với ẩn z) có nghiệm là:

A. 1 + 1i. B. 1 + 2i. C. 1 - 2i. D. 1 - i.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Với số phức z = a + bi (a, b∈ ℝ).

Ta có:

0 = iz + 2 – i = i(a + bi) + 2 – i = (2 - b) + (a - 1)i

$\Leftrightarrow \begin{cases}2-b=0\\ a-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2\\ a=1\end{cases} \Leftrightarrow$ z = 1 + 2i, ứng với đáp án B.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Ta biến đổi:

iz + 2 – i = 0 ⇔ iz = i - 2 ⇔ z = $\dfrac{i-2}{i}$ = (i - 2)(-i) = 1 + 2i, ứng với đáp án B.

Bài 21. Phương trình (2 + 3i)z = z – 1 (với ẩn z) có nghiệm là:

A. $\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$. B. $\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$. C. $-\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$. D. $-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Với số phức z = a + bi (a, b ∈ ℝ).

Ta có: $(2 + 3i)z = z - 1 \Leftrightarrow (2 + 3i)(a + bi) = a + bi - 1$

$$\Leftrightarrow 2a - 3b + (3a + 2b)i = a - 1 + bi \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b = a - 1 \\ 3a + 2b = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/10 \\ b = 3/10 \end{cases} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i,$$ ứng với đáp án C.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta biến đổi:

$$(2 + 3i)z = z - 1 \Leftrightarrow (1 + 3i)z = -1 \Leftrightarrow z = \frac{-1}{1+3i} = \frac{-1(1-3i)}{1^2+3^2} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i,$$

ứng với đáp án C.

Bài 22. Phương trình $(2 - i)\overline{z} - 4 = 0$ (với ẩn z) có nghiệm là:

A. $\frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$. B. $\frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$. C. $-\frac{8}{5} - \frac{4}{5}i$. D. $-\frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Với số phức z = a + bi (a, b ∈ ℝ).

Ta có:

$$0 = (2 - i)\overline{z} - 4 = (2 - i)\overline{a + bi} - 4 = (2 - i)(a - bi) - 4$$

$$= (2a - b - 4) - (a + 2b)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b - 4 = 0 \\ -(a + 2b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 4 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8/5 \\ b = -4/5 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i,$$

ứng với đáp án A.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta biến đổi:

$$(2 - i)\overline{z} - 4 = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = \frac{4}{2-i} = \frac{4(2+i)}{2^2+1^2} = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$\Leftrightarrow z = \overline{\overline{z}} = \overline{\frac{8}{5} + \frac{4}{5}i} = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i,$$ ứng với đáp án A.

Bài 23. Cho số phức z = x + yi (x, y ∈ ℝ). Khi z ≠ i, phần thực của số phức $\frac{z+i}{z-i}$ là:

A. $\frac{x^2+y^2+1}{x^2+(y+1)^2}$ B. $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}$ C. $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}$ D. $\frac{x^2+y^2+1}{x^2+(y-1)^2}$

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$w = \frac{z+i}{z-i} = \frac{x+yi+i}{x+yi-i} = \frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i} = \frac{[x+(y+1)i][x-(y-1)i]}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+y^2-1)+2xi}{x^2+(y-1)^2}.$$

Do đó, số phức w có phần thực là $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}$.

§2 CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC - PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Căn bậc hai của số phức

Định nghĩa: Cho số phức w. *Mỗi số phức* z *thỏa mãn* $z^2 = w$ *được gọi là một căn bậc hai của* w.

Nói cách khác, mỗi căn bậc hai của w là một nghiệm của phương trình $z^2 - w = 0$ (với ẩn z).

Để tìm căn bậc hai của số phức w, ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu w là số thực (tức là w = a):

- Với a > 0 thì w có hai căn bậc hai là $\pm\sqrt{a}$.
- Với a < 0 thì w có hai căn bậc hai là $\pm i\sqrt{-a}$.

Trường hợp 2: Nếu $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$ và $b \neq 0$) thì $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của w khi và chỉ khi:

$$z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Ghi nhớ về căn bậc hai của số phức w:

- w = 0 có đúng một căn bậc hai là z = 0.
- $w \neq 0$ có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0).

Đặc biệt:

- Số thực dương a có hai căn bậc hai là $\pm\sqrt{a}$.
- Số thực âm a có hai căn bậc hai là $\pm i\sqrt{-a}$.

2. Phương trình bậc hai

Cho phương trình: $Ax^2 + Bx + C = 0$, với A, B, C là những số phức và $A \neq 0$.

Xét biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC$, ta có các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-B + \delta}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B - \delta}{2A}$$

trong đó δ là một căn bậc hai của Δ.

Đặc biệt:

- Nếu Δ là số thực dương thì phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}.$$

- Nếu Δ là số thực âm thì phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-B+i\sqrt{-\Delta}}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B-i\sqrt{-\Delta}}{2A}.$$

Trường hợp 2: Nếu D = 0 thì phương trình có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}$.

Chú ý:

1. Mọi phương trình bậc hai (với hệ số phức) có hai nghiệm phức (có thể trùng nhau).

2. Phương trình:

$$A_0z^n + A_1z^{n-1} + ... + A_{n-1}z + A_n = 0$$

trong đó $A_0, A_1, ..., A_n$ là n + 1 số phức cho trước, $A_0 \neq 0$ và n là một số nguyên dương luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Các căn bậc hai của số phức -i là:

A. $\pm\frac{1}{2}(1 - i)$.   B. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$.   C. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.   D. $\pm\frac{1}{2}(1 + i)$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của -i, tức là ta có:

$$-i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ 2xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, số -i có hai căn bậc hai là $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$.

Bài 2. Các căn bậc hai của số phức 4i là:

A. $\pm\sqrt{2}(1 + i)$.   B. $\pm(1 + i)$.   C. $\pm(1 - i)$.   D. $\pm\sqrt{2}(1 - i)$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của 4i, tức là ta có:

$$4i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \sqrt{2} \\ x = y = -\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy, số -i có hai căn bậc hai là $\pm\sqrt{2}(1 + i)$.

Bài 3. Các căn bậc hai của số phức $1 + 4\sqrt{3}i$ là:

A. $\pm\sqrt{3}(2 - i)$. B. $\pm(2 - i\sqrt{3})$. C. $\pm(2 + i\sqrt{3})$. D. $\pm\sqrt{3}(2 + i)$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $1 + 4\sqrt{3}i$, tức là ta có:

$1 + 4\sqrt{3}i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \\ x^2 - \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{x}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \\ x^4 - x^2 - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{x} \\ x^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ và } y = \sqrt{3} \\ x = -2 \text{ và } y = -\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy, số $1 + 4\sqrt{3}i$ có hai căn bậc hai là $\pm(2 + i\sqrt{3})$.

Bài 4. Trên tập số phức, số nghiệm của phương trình $x(x - i)(x^2 + 4) = 0$ bằng:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Đáp số trắc nghiệm D.

Bài 5. Phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$ có nghiệm là:

A. $1 \pm i$. B. $1 \pm 2i$. C. $-1 \pm 2i$. D. $-1 \pm i$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Phương trình có D' = -4 < 0 nên nó có hai nghiệm $z_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Lưu ý: Cũng có thể sử dụng phép biến đổi:

$z^2 + 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow (z + 1)^2 = -4 \Leftrightarrow z + 1 = \pm 2i \Leftrightarrow z_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Bài 6. Phương trình $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$ có nghiệm là:

A. $2i$ và $-1 + i$. B. $\pm 2i$. C. $-1 \pm i$. D. i và $-1 + 2i$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Phương trình có:

$D = (1 - 3i)^2 + 8(1 + i) = -8 - 6i + 8 + 8i = 2i$.

Giả sử số $d = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $D = 2i$, tức là ta có:

$2i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{array}\right..$$

Tức là, biệt số Δ có hai căn bậc hai là $\pm(1 + i)$.

Nên phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{3i - 1 + (1 + i)}{2} = 2i; \qquad z_2 = \frac{3i - 1 - (1 + i)}{2} = -1 + i.$$

Bài 7. Hai số phức có tổng của chúng bằng $4 - i$ và tích của chúng bằng $5(1 - i)$ là:

A. 3 và 1 - i. B. 3 - i và 1. C. 3i và 4 - 4i. D. 3 + i và 1 - 2i.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Với hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện đầu bài, ta có:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 - i \\ z_1.z_2 = 5(1 - i) \end{cases}$$

suy ra z_1, z_2 là nghiệm của phương trình:

$z^2 - (4 - i)z + 5(1 - i) = 0$

phương trình có $\Delta = (4 - i)^2 - 20(1 - i) = -5 + 12i$.

Giả sử số $d = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $\Delta = -5 + 12i$, tức là ta có:

$-5 + 12i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^2 - \left(\dfrac{6}{x}\right)^2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ và } y = 3 \\ x = -2 \text{ và } y = -3 \end{array}\right..$$

Tức là, biệt số Δ có hai căn bậc hai là $\pm(2 + 3i)$.

Nên phương trình đó có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{4 - i + (2 + 3i)}{2} = 3 + i; \qquad z_2 = \frac{4 - i - (2 + 3i)}{2} = 1 - 2i.$$

Bài 8. Phương trình $z^3 + 1 = 0$ có nghiệm là:

A. $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ và 1. B. $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ và -1. C. $\dfrac{1 \pm i\sqrt{2}}{2}$ và 1. D. $\dfrac{1 \pm i\sqrt{2}}{2}$ và -1.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$(z + 1)(z^2 - z + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+1=0 \\ z^2-z+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0=-1 \\ z_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$, ứng với đáp án B.

Bài 9. Phương trình $z^4 + 4 = 0$ có nghiệm là:

A. $\pm(1 + i)$ và $\pm(1 - i)$.
B. $\pm(1 + i)$ và $\pm(2 - i)$.
C. $\pm(2 + i)$ và $\pm(1 - i)$.
D. $\pm(2 + i)$ và $\pm(2 - i)$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$z^4 = -4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z^2=2i & (1) \\ z^2=-2i & (2) \end{array}\right.$$

▪ Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của 2i, tức là ta có:

$$2i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm y \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{array}\right.$$

Suy ra, phương trình (1) có hai nghiệm là $\pm(1 + i)$.

▪ Giả sử số $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của -2i, tức là ta có:

$$-2i = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm y \\ xy=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y=1 \\ x=-y=-1 \end{array}\right.$$

Suy ra, phương trình (2) có hai nghiệm là $\pm(1 - i)$.

Vậy, phương trình đã cho có bốn nghiệm là $\pm(1 + i)$ và $\pm(1 - i)$.

Bài 10. Để phương trình (với ẩn z) $z^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ làm một nghiệm điều kiện là:

A. $b = 1, c = -1$.
B. $b = 2, c = -2$.
C. $b = -2, c = 2$.
D. $b = -1, c = 1$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Để $z = 1 + i$ làm một nghiệm của phương trình điều kiện là:

$$0 = (1 + i)^2 + b(1 + i) + c = (b + c) + (b + 2)i \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \end{cases}$$

Vậy, với $b = -2$ và $c = 2$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

§3 DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Số phức dưới dạng lượng giác

Định nghĩa 1: (*Acgumen của số phức* $z \neq 0$): *Cho số phức* $z \neq 0$. *Gọi* M *là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số* z. *Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu* Ox, *tia cuối* OM *được gọi là một acgumen của* z.

Chú ý:

1. Nếu φ là một acgumen của z thì mọi acgumen của z có dạng $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Hai số phức z và lz (với $z \neq 0$ và l là số thực dương) có cùng acgumen.

Định nghĩa 2: (*Dạng lượng giác của số phức*): *Dạng* $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$, *trong đó* $r > 0$ *được gọi là dạng lượng giác của số phức* $z \neq 0$. *Còn dạng* $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ *được gọi là dạng đại số của số phức* z.

Nhận xét: Để tìm dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ khác 0 cho trước, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm r: đó là môđun của z, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; số r đó cũng là khoảng cách từ gốc O đến điểm M biểu diễn số z trong mặt phẳng phức.

Bước 2: Tìm φ: đó là acgumen của z, φ là số thực sao cho $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ và $\sin\varphi = \frac{b}{r}$; số φ đó cũng là số đo một góc lượng giác tia đầu Ox, tia cuối OM.

Chú ý:

1. $|z| = 1$ khi và chỉ khi $z = \cos\varphi + i.\sin\varphi$ $(\varphi \in \mathbb{R})$.

2. Khi $z = 0$ thì $|z| = r = 0$ nhưng acgumen của z không xác định (đôi khi coi acgumen của 0 là số thực tùy ý và vẫn viết $0 = 0(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$).

3. Cần để ý đòi hỏi $r > 0$ trong dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ của số phức $z \neq 0$.

2. Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác

Định lí: Nếu $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ và $z' = r'(\cos\varphi' + i.\sin\varphi')$ với $r, r' \geq 0$ thì:

$$zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i.\sin(\varphi + \varphi')]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i.\sin(\varphi - \varphi')] \text{ khi } r' > 0.$$

Chú ý: Nếu các điểm M, M' biểu diễn theo thứ tự các số phức z, z' khác 0 thì acgumen của $\frac{z}{z'}$ là số đo góc lượng giác tia đầu OM', tia cuối OM.

3. Công thức Moa-vrơ (Moivre) và ứng dụng

Công thức moa-vrơ: Với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$[r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi).$$

Khi r = 1, ta được:

$$(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i.\sin n\varphi.$$

Ứng dụng vào lượng giác: Ta có:

$$(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i.\sin 3\varphi.$$

Mặt khác, sử dụng khai triển lũy thừa bậc ba ta được:

$$(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi.(i.\sin\varphi) + 3\cos\varphi.(i.\sin\varphi)^2 + \sin^3\varphi.$$

Từ đó, suy ra:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi.\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi.\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác: Số phức z = r(cosφ + i.sinφ), r > 0 có hai căn bậc hai là: $\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i.\sin\frac{\varphi}{2}\right)$

$$\text{và } -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i.\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i.\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right].$$

 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Dạng lượng giác của số phức $z = 1 + i\sqrt{3}$ là:

A. $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

B. $2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

C. $\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}$.

D. $\cos\frac{\pi}{3} - i.\sin\frac{\pi}{3}$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Với $z = 1 + i\sqrt{3}$, ta có:

Môđun $r = \sqrt{1+3} = 2$,

Acgumen φ thỏa mãn $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ và $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ chọn $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Từ đó, suy ra $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta biến đổi:

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Bài 2. Giả sử số phức $z \neq 0$ có dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$. Dạng lượng giác của số phức $\frac{1}{z}$ là:

A. $r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$.

B. $\frac{1}{r}(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$.

C. $2r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$.

D. $\frac{2}{r}(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Số phức $\frac{1}{z} = \frac{1}{\bar{z}.z}\bar{z}$ có môdun $\frac{1}{r^2}r = \frac{1}{r}$ và acgumen bằng φ nên có dạng: $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$, ứng với đáp án B.

Bài 3. Giả sử số phức z có dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$. Dạng lượng giác của số phức kz $(k \in \mathbb{R}^*)$ là:

A. $-kr(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$.

B. $-2kr(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$.

C. $kr(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$.

D. $2kr(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Số phức kz có môdun $|kz| = |k|r$ và acgumen bằng φ nếu $k > 0$ và là $\varphi + \pi$ nếu $k < 0$ nên có dạng:

$$kz = \begin{cases} kr(\cos\varphi + i.\sin\varphi) & \text{nếu } k > 0 \\ -kr[\cos(\varphi+\pi) + i.\sin(\varphi+\pi)] & \text{nếu } k < 0 \end{cases} = kr(\cos\varphi + i.\sin\varphi),$$

ứng với đáp án C.

Bài 4. Dạng lượng giác của số phức $(1 - i\sqrt{3})(1 + i)$ là:

A. $-2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

B. $2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$.

C. $-\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

D. $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$(1 - i\sqrt{3})(1 + i) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$, ứng với đáp án B.

Bài 5. Dạng lượng giác của số phức $2i(\sqrt{3} - i)$ là:

A. $\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}$.

B. $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

C. $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

D. $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$2i(\sqrt{3} - i) = 2 + 2\sqrt{3}\,i = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}\right)$, ứng với đáp án D.

Bài 6. Dạng lượng giác của số phức $\frac{1}{2+2i}$ là:

A. $\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

C. $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $\frac{1}{2+2i} = \frac{2-2i}{4} = \frac{1}{2}(1 - i)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$, ứng với đáp án B.

Bài 7. Giá trị của $(\sqrt{3} - i)^6$ bằng:

A. 2^6. B. 1. C. -1. D. -2^6.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$\Rightarrow (\sqrt{3} - i)^6 = \left\{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}^6 = 2^6\left[\cos(-\pi) + i.\sin(-\pi)\right] = -2^6$.

Bài 8. Giá trị của $\left(\frac{i}{1-i}\right)^{2004}$ bằng:

A. $\frac{1}{2^{2004}}$. B. $\frac{1}{2^{1002}}$. C. $-\frac{1}{2^{1002}}$. D. $-\frac{1}{2^{2004}}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2004} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}^{2004}$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2004}\left[\cos(-501\pi) + i.\sin(-501\pi)\right] = -\frac{1}{2^{1002}}.$$

Bài 9. Giá trị của $\left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21}$ bằng:

A. 1. B. 2^{21}. C. 3^{21}. D. 4^{21}.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}} = \frac{(5+3i\sqrt{3})(1+2i\sqrt{3})}{13} = -1 + i\sqrt{3} = -2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21} = \left\{-2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\}^{21}$$

$$= (-2)^{21}\left[\cos(-7\pi) + i.\sin(-7\pi)\right] = 2^{21}.$$

Bài 10. Dạng lượng giác của số phức $1 - i.\tan\frac{\pi}{5}$ là:

A. $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$.

B. $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{5}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$.

C. $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i.\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

D. $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{5} + i.\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có: $1 - i.\tan\frac{\pi}{5} = 1 - i.\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{5} - i.\sin\frac{\pi}{5}\right)$

$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i.\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$, ứng với đáp án A.

Bài 11. Dạng lượng giác của số phức $\tan\frac{5\pi}{8} + i$ là:

A. $\frac{1}{\cos\frac{7\pi}{8}}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i.\sin\frac{7\pi}{8}\right)$

B. $\frac{1}{\sin\frac{7\pi}{8}}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i.\sin\frac{7\pi}{8}\right)$.

C. $\frac{1}{\cos\frac{7\pi}{8}}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right) + i.\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right]$

D. $\frac{1}{\sin\frac{7\pi}{8}}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right) + i.\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right]$

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$$\tan\frac{5\pi}{8} + i = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{8}\right) + i = \cot\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i = \cot\frac{7\pi}{8} + i$$

$$= \frac{\cos\frac{7\pi}{8}}{\sin\frac{7\pi}{8}} + i = \frac{1}{\sin\frac{7\pi}{8}}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i.\sin\frac{7\pi}{8}\right)$$, ứng với đáp án B.

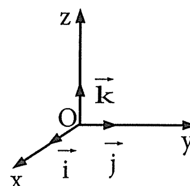
PHẦN V PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1 HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hệ tọa độ trong không gian



Định nghĩa: Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz *đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ trong không gian.*

Kí hiệu Oxyz hoặc $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị lần lượt nằm trên ba trục đó.

- Điểm O được gọi là gốc tọa độ.
- Trục Ox được gọi là *trục hoành*, trục Oy được gọi là *trục tung*, trục Oz được gọi là *trục cao.*

Ta chú ý rằng:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \text{ và } \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$$

2. Tọa độ của điểm

Ta có:

$$M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Chú ý: Ta có các kết quả:

$M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0$, tức là $M(x; y; 0)$.

$M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0$, tức là $M(0; y; z)$.

$M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$, tức là $M(x; 0; z)$.

$M \in Ox \Leftrightarrow y = 0$ và $z = 0$, tức là $M(x; 0; 0)$.

$M \in Oy \Leftrightarrow x = 0$ và $z = 0$, tức là $M(0; y; 0)$.

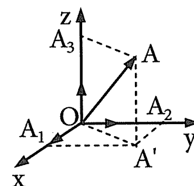
$M \in Oz \Leftrightarrow x = 0$ và $y = 0$, tức là $M(0; 0; z)$.

3. Tọa độ của vectơ

Ta có:

$$\vec{v}(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Chú ý:



1. Cho vectơ $\vec{v}$ khi đó tồn tại duy nhất điểm A sao cho $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. Gọi A_1, A_2, A_3, A' theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A lên các trục Ox, Oy, Oz và mặt phẳng (Oxy).

Ta có:

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$ suy ra x, y, z là các tọa độ tương ứng của các điểm A_1, A_2, A_3 trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz.

2. Nếu $\vec{v}$ (x; y; z) thì $x = \vec{v}.\vec{i}$, $y = \vec{v}.\vec{j}$, $z = \vec{v}.\vec{k}$.

Đối với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{v_1}$ $(x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v_2}$ $(x_2; y_2; z_2)$ ta có các kết quả sau:

a. $\vec{v_1} = \vec{v_2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$

b. $\alpha\vec{v_1} = (\alpha x_1; \alpha y_1; \alpha z_1)$, với $\alpha \in \mathbb{R}$

c. $\alpha\vec{v_1} \pm b\vec{v_2} = (\alpha x_1 \pm \beta x_2; \alpha y_1 \pm \beta y_2; \alpha z_1 \pm \beta z_2)$, với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

d. $\vec{v_1}.\vec{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

e. $|\vec{v_1}| = \sqrt{\vec{v_1}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

f. $\cos(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

g. $\vec{v_1} \perp \vec{v_2} \Leftrightarrow \vec{v_1}.\vec{v_2} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

4. Liên hệ giữa tọa độ của vectơ và tọa độ hai điểm mút

Trong hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ ta có các kết quả sau:

a. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

b. $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

c. Điểm M chia đoạn thẳng AB theo một tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$) có tọa độ là $\left(\dfrac{x_A - kx_B}{1-k}; \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}; \dfrac{z_A - kz_B}{1-k}\right)$.

d. Trung điểm I của đoạn AB có tọa độ $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

5. Tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ

Định nghĩa: Tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{v}_1(x_1; y_1; z_1)$ *và* $\vec{v}_2(x_2; y_2; z_2)$ *kí hiệu* $[\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ *là một vectơ* $\vec{v}$ *được xác định bởi:*

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

Các tính chất: Ta có:

a. $[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \vec{0}$ khi và chỉ khi hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$ cùng phương.

b. Vectơ $[\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ vuông góc với hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$.

c. $|[\vec{v}_1, \vec{v}_2]| = |\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|.\sin a$, trong đó a là góc giữa hai vectơ $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$.

Diện tích tam giác: Diện tích của ΔABC có các đỉnh được cho bởi công thức:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ

Định lí: Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ *và* $\vec{v}_3$ *đồng phẳng là:* $[\vec{v}_1, \vec{v}_2].\vec{v}_3 = 0$.

Như vậy, với $\vec{v}_1(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{v}_2(x_2; y_2; z_2)$ và $\vec{v}_3(x_3; y_3; z_3)$ thì $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ và $\vec{v}_3$ đồng phẳng khi và chỉ khi:

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = 0$$

Thể tích hình hộp: Thể tích V của hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ được cho bởi công thức:

$$V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}|$$

Thể tích tứ diện: Thể tích V của tứ diện ABCD được cho bởi công thức:

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}].\overrightarrow{AD}|$$

6. Phương trình mặt cầu

Định lí: Trong không gian Oxyz, *mặt cầu* (S) *có tâm* I(a; b; c) *và bán kính* R *có phương trình*:

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Phương trình (1) gọi là *phương trình chính tắc của mặt cầu.*

Vậy, ta được:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(a;b;c) \\ \text{Bán kính } R \end{cases} \Leftrightarrow (C): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

Chú ý: Ta có:

- Mặt cầu tâm O bán kính R có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
- Mặt cầu đơn vị có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Định lí: Trong không gian Oxyz, *mặt* (S) *có phương trình*:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \qquad (2)$$

với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ *là phương trình của mặt cầu tâm* I(a; b; c) *và bán kính*

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}.$$

Phương trình (2) gọi là *phương trình tổng quát của mặt cầu.*

 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, gốc O có tọa độ là:

A. (0; 0; 0). B. (1; 0; 0). C. (0; 1; 0). D. (0; 0; 1).

Đáp số trắc nghiệm A.

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, vectơ $\vec{i}$ có tọa độ là:

A. (0; 0; 0). B. (1; 0; 0). C. (0; 1; 0). D. (0; 0; 1).

Đáp số trắc nghiệm B.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, vectơ $\vec{j}$ có tọa độ là:

A. (0; 0; 0). B. (1; 0; 0). C. (0; 1; 0). D. (0; 0; 1).

Đáp số trắc nghiệm C.

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, vectơ $\vec{k}$ có tọa độ là:

A. (0; 0; 0). B. (1; 0; 0). C. (0; 1; 0). D. (0; 0; 1).

Đáp số trắc nghiệm D.

Bài 5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, vectơ $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ có tọa độ là:

A. (1; -2; 3). B. (1; 2; 3). C. (-1; 2; -3). D. (-1; -2; 3).

Đáp số trắc nghiệm A.

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, vectơ $\vec{u} = 3\vec{j} - 2\vec{k}$ có tọa độ là:

A. (0; -3; 2). B. (0; 3; 2). C. (0; -3; -2). D. (0; 3; -2).

Đáp số trắc nghiệm D.

Bài 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, vectơ $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{k}$ có tọa độ là:

A. (3; 0; 1). B. (3; 0; -1). C. (-3; 0; -1). D. (-3; 0; 1).

Đáp số trắc nghiệm B.

Bài 8. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, vectơ $\vec{u} = \vec{k} + 4\vec{i} - 2\vec{j}$ có tọa độ là:

A. (4; -2; 1). B. (1; 4; -2). C. (-2; 4; 1). D. (-1; -4; 2).

Đáp số trắc nghiệm A.

☞ Chú ý: Để không bị nhầm lẫn khi xác định tọa độ vectơ thông qua biểu thức chứa ba vectơ cơ sở $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ các em hãy luôn viết lại nó dưới dạng $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (theo đúng thứ tự).

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, vectơ $\vec{u}$ (2; 1; -1) và $\vec{v}$ (2; 1; a^2). Để $\vec{u} = \vec{v}$ điều kiện là:

A. a = 0. B. a = 1. C. a = -1. D. Vô nghiệm.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có điều kiện là: $-1 = a^2$, vô nghiệm.

Vậy, không tồn tại a để $\vec{u} = \vec{v}$.

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, vectơ $\vec{u}$ (0; 1; -5) và $\vec{v}$(0; a; b). Để $\vec{u} = \vec{v}$ điều kiện là:

A. a = b = 1. B. a = b = 5.

C. a = 1 và b = -5. D. a = -5 và b = 1.

Đáp số trắc nghiệm C.

Bài 11. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{u_1}$ (3; -4; -2), $\vec{u_2}$ (1; 0; -3). Vectơ $\vec{u} = 3\vec{u_1} + 2\vec{u_2}$ có tọa độ là:

A. (11; -12; -12). B. (11; 12; 12).

C. (-11; 12; 12). D. (-11; -12; -12).

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có: $\vec{u} = 3\vec{u_1} + 2\vec{u_2}$ = 3(3; -4; -2) + 2(1; 0; -3) = (11; -12; -12).

Vậy, ta có $\vec{u}$(11; -12; -12).

☞ Chú ý: Bài tập trên rất đơn giản nhưng lại rất dễ nhầm lẫn, do đó các em học sinh cần thận trọng.

Bài 12. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\overrightarrow{u_1}$ (-1; -3; 6), $\overrightarrow{u_2}$ (2; 1; -5). Vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{u_1} - 5\overrightarrow{u_2}$ có tọa độ là:

A. (12; 11; -37).
B. (-12; -11; 37).
C. (12; 11; 37).
D. (-12; -11; -37).

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$\vec{u} = 2\overrightarrow{u_1} - 5\overrightarrow{u_2} = 2(-1; -3; 6) - 5(2; 1; -5) = (-12; -11; 37)$.

Vậy, ta có $\vec{u}$(-12; -11; 37).

☞ Chú ý: Với những biểu thức chứa ba vectơ, để đảm bảo tính chính xác, các em học sinh hãy kiểm tra kết quả bằng máy tính CASIO fx-570MS.

Bài 13. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a}$(-2; 3; 1), $\vec{b}$(5; -7; 0) và $\vec{c}$(3; - 2; 4). Vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c}$ có tọa độ là:

A. (11; 7; 14).
B. (11; 7; -14).
C. (-11; 7; -14).
D. (-11;-7;-14).

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c} = 2(-2; 3; 1) + (5; -7; 0) - 4(3; - 2; 4) = (-11; 7; -14)$.

Vậy, ta có $\vec{u}$(-11; 7; -14).

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Thiết lập môi trường làm việc với vectơ cho máy tính bằng cách ấn:

[MODE] [MODE] [MODE] [3]

- Để nhập toạ độ cho vectơ $\vec{a}$ ta ấn:

[SHIFT] [VCT] [1] [1] [3] [=] [(-)] 2 [=] 3 [=] 1 [=]

- Để nhập toạ độ cho vectơ $\vec{b}$ ta ấn:

[SHIFT] [VCT] [1] [2] [3] [=] 5 [=] [(-)] 7 [=] 0 [=]

- Để nhập toạ độ cho vectơ $\vec{c}$ ta ấn:

[SHIFT] [VCT] [1] [3] [3] [=] 3 [=] [(-)] 2 [=] 4 [=]

▪ Để tính $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - 4\overrightarrow{c}$ ta ấn:

2 SHIFT VCT 3 1 + SHIFT VCT 3 2 – 4 SHIFT VCT 3 3

= → −11

▶ → 7

▶ → −14

Vậy, ta được $\overrightarrow{u}$ (-11; 7; -14), ứng với đáp án C.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận* chúng ta sử dụng các tính chất của các phép toán vectơ để tính.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính* CASIO fx-570MS chúng ta sử dụng chức năng tính vectơ của máy tính để tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{u}$. Tuy nhiên, hầu hết các em học sinh khi lần đầu đọc cách làm đó đều có chung một nhận định là nó *"quá phức tạp"* và sẽ mất thời gian hơn cách giải bằng tự luận. Điều này hoàn toàn sai, nhất là với những vectơ có tọa độ lẻ.

Bài 14. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, vectơ $\overrightarrow{u}\left(\frac{1}{2}; \frac{4}{3}; 2\right)$ có độ dài bằng:

A. $\frac{\sqrt{217}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{207}}{6}$. C. $\frac{\sqrt{197}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{187}}{6}$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{16}{9} + 4} = \frac{\sqrt{217}}{6}$$, ứng với đáp án A.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE MODE MODE 3

SHIFT VCT 1 1 3 = 1 a b/c 2 = 4 a b/c 3 = 2 =

SHIFT Abs SHIFT VCT 3 1 = → 2.4551

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 15. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\overrightarrow{u_1}\left(\frac{1}{2}; -3; \frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{u_2}\left(1; \frac{4}{3}; -\frac{3}{2}\right)$. Vectơ $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2}$ có độ dài bằng:

A. $\frac{\sqrt{5209}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{5409}}{6}$. C. $\frac{\sqrt{5609}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{5809}}{6}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$$\vec{u} = 3\vec{u_1} - 2\vec{u_2} = 3\left(\frac{1}{2}; -3; \frac{2}{3}\right) - 2\left(1; \frac{4}{3}; -\frac{3}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}; -9; 2\right) - \left(2; \frac{8}{3}; -3\right) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{35}{3}; 5\right).$$

Từ đó, suy ra:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{35}{3}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1225}{9} + 25} = \frac{\sqrt{5809}}{6}$$, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE MODE MODE 3

SHIFT VCT 1 1 3 = 1 a b/c 2 = (–) 3 = 2 a b/c 3 =

SHIFT VCT 1 2 3 = 1 = 4 a b/c 3 = (–) 3 a b/c 2 =

3 SHIFT VCT 3 1 – 2 SHIFT VCT 3 2 =

SHIFT Abs SHIFT VCT 3 4 = | 12.7027 |

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 16. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a}\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$ và $\vec{b}\left(\frac{4}{3}; -5; \frac{3}{2}\right)$. Giá trị $\vec{a}.\vec{b}$ bằng:

A. $-\frac{13}{6}$. B. $-\frac{17}{6}$. C. $\frac{17}{6}$. D. $\frac{13}{6}$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$$\vec{a}.\vec{b} = 1.\frac{4}{3} + \frac{1}{2}.(-5) - \frac{2}{3}.\frac{3}{2} = \frac{4}{3} - \frac{5}{2} - 1 = -\frac{13}{6}$$, ứng với đáp án A.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

MODE MODE MODE 3

SHIFT VCT 1 1 3 = 1 = 1 a b/c 2 = (–) 2 a b/c 3 =

SHIFT VCT 1 2 3 = 4 a b/c 3 = (–) 5 = 3 a b/c 2 =

SHIFT VCT 3 1 SHIFT VCT ▶ 1 SHIFT VCT 3 2

= | –2⌋1⌋6 |

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 17. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a}(-2; 3; 1)$, $\vec{b}(5; -7; 0)$ và $\vec{c}(3; -2; 4)$. Giá trị $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})$ bằng:

A. -39. B. -33. C. 33. D. 39.

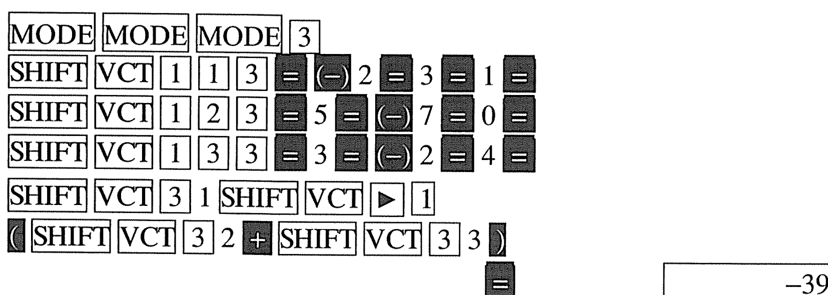
Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = (-2; 3; 1)[(5; -7; 0) + (3; -2; 4)] = (-2; 3; 1)(8; -9; 4) = -39$,

ứng với đáp án A.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:



Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

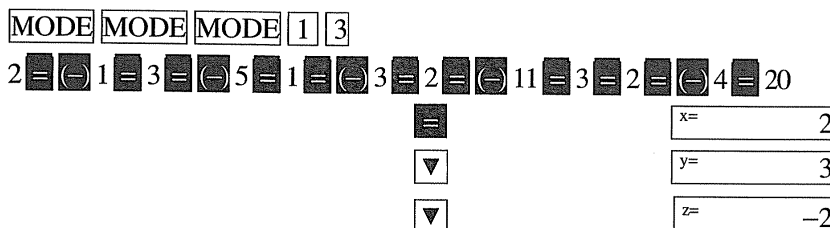
Bài 18. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a}(2; -1; 3)$, $\vec{b}(1; -3; 2)$ và $\vec{c}(3; 2; -4)$. Vectơ $\vec{v}$ thỏa mãn $\vec{a}.\vec{v} = -5$, $\vec{v}.\vec{b} = -11$ và $\vec{c}.\vec{v} = 20$ có tọa độ là:

A. (2; 3; 2). B. (2; 3; -2). C. (2; -3; -2). D. (-2; -3; -2).

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Giả sử $\vec{v}(x; y; z)$, ta biến đổi điều kiện về dạng:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -5 \\ x - 3y + 2z = -11 \\ 3x + 2y - 4z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}(2; 3; -2) \text{ bằng cách ấn:}$$



Vậy, ta được $\vec{v}(2; 3; -2)$.

Bài 19. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho vectơ $\vec{a}(1; -3; 4)$. Vectơ $\vec{b}(2; y; z)$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ khi:

A. y = -3 và z = 4. B. y = -6 và z = 8. C. y = 6 và z = -8. D. y = 3 và z = -4.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{-3}{y} = \frac{4}{z} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ z = 8 \end{cases} \Rightarrow \vec{b}(2; -6; 8)$, ứng với đáp án B.

Bài 20. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho vectơ $\vec{a}\left(-1; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$. Vectơ $\vec{b}\left(-\frac{a}{2}; b; \frac{3c}{2}\right)$ vuông góc với vectơ $\vec{a}$ khi:

A. 4a + 3b + 3c = 0. B. 4a - 3b + 3c = 0.

C. 2a + 3b + 3c = 0. D. 2a - 3b + 3c = 0.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{2} - \frac{3b}{4} + \frac{3c}{4} = 0 \Leftrightarrow 2a - 3b + 3c = 0$

ứng với đáp án D.

☞ Nhận xét: Như vậy, qua 20 bài toán trên chúng ta đã sử dụng các kiến thức rất cơ bản của vectơ trong không gian để thực hiện chúng. Tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới các bài toán về tọa độ của điểm trong không gian.

Bài 21. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A\left(9; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right)$ và $B\left(8; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}\right)$. Hãy lựa chọn kết quả đúng:

A. $\overrightarrow{AB}(17; 1; 1)$ và $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{291}$. B. $\overrightarrow{AB}\left(-1; \frac{5}{3}; \frac{3}{2}\right)$ và $|\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{217}}{6}$.

C. $\overrightarrow{AB}(-17; -1; -1)$ và $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{291}$. D. $\overrightarrow{AB}\left(-1; \frac{5}{3}; -\frac{3}{2}\right)$ và $|\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{217}}{6}$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{AB} = \left(8-9; \frac{4}{3}+\frac{1}{3}; \frac{5}{4}+\frac{1}{4}\right) = \left(-1; \frac{5}{3}; \frac{3}{2}\right),$$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (\frac{5}{3})^2 + (\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{16}{9} + 4} = \frac{\sqrt{217}}{6}$, ứng với đáp án B.

Bài 22. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(3; -1; 2), B(-5; 3; -2), C(1; 2; -3). Tọa độ trọng tâm ΔABC là:

A. $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};-1\right)$. B. $\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-1\right)$. C. $\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};1\right)$. D. $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};1\right)$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Trọng tâm G của DABC có tọa độ:

$$G=\left(\frac{3-5+1}{3};\frac{-1+3+2}{3};\frac{2-2-3}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-1\right)$$, ứng với đáp án B.

Bài 23. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(9; 0; 0), B(0; 9; 0), C(0; 0; 9). Tọa độ hình chiếu vuông góc H của O lên (ABC) là:

A. (9; 9; 9). B. (9; 6; 3). C. (3; 3; 3). D. (3; 6; 9).

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Nhận thấy rằng O.ABC là hình chóp đều nên H chính là trọng tâm của DABC, nên có tọa độ:

G(3; 3; 3), ứng với đáp án C.

Bài 24. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm M(1; 2; 3), N(-1; 0; 4), P(2; -3; 1) và Q(2; 1; 2). Cặp vectơ cùng phương là:

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PQ}$. B. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{NQ}$. C. $\overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{NP}$. D. Không tồn tại.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án A thì:

  $\overrightarrow{MN}(-2; -2; 1)$ và $\overrightarrow{PQ}(0; 4; 1) \Rightarrow \overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PQ}$ không cùng phương

  $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với đáp án B thì:

  $\overrightarrow{MP}(1; -5; -2)$ và $\overrightarrow{NQ}(3; 1; -2) \Rightarrow \overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{NQ}$ không cùng phương

  $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

- Với đáp án C thì:

  $\overrightarrow{MQ}(1; -1; -1)$ và $\overrightarrow{NP}(3; -3; -3) \Rightarrow \overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{NP}$ cùng phương.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án C thì:

  $\overrightarrow{MQ}(1; -1; -1)$ và $\overrightarrow{NP}(3; -3; -3) \Rightarrow \overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{NP}$ cùng phương.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ **Nhận xét:** Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên chúng ta sử dụng các phép thử:

- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1,* chúng ta cần thực hiện ba phép thử.
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 2,* chúng ta cần thực hiện hai phép thử.

Bài 25. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm M(2; 0; 0), N(0; -3; 0) và P(0; 0; 4). Nếu tứ giác MNPQ là hình bình hành thì tọa độ của điểm Q là:

A. (-2; -3; 4). B. (3; 4; 2). C. (2; 3; 4). D. (-2; -3; -4).

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Giả sử Q(x; y; z). Khi đó, để MNPQ là hình bình hành, điều kiện là:

$$MN \overset{/\!/}{=} QP \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow (-2; -3; 0) = (-x; -y; 4 - z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -x \\ -3 = -y \\ 0 = 4 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow Q(2; 3; 4), \text{ ứng với đáp án C.}$$

➢ *Lời giải tự luận 2:* Giả sử Q(x; y; z). Khi đó, để MNPQ là hình bình hành, điều kiện là MP và NQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của MP và NQ, ta có:

$$I(1; 0; 2) \text{ và } J\left(\frac{x}{2}; \frac{y-3}{2}; \frac{z}{2}\right),$$

$$I \equiv J \Leftrightarrow \begin{cases} x/2 = 1 \\ \dfrac{y-3}{2} = 0 \\ z/2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow Q(2; 3; 4), \text{ ứng với đáp án C.}$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1.1*: (Từ trái qua phải): Để MNPQ là hình bình hành, điều kiện là $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, với $\overrightarrow{MN}$ (-2; -3; 0).

Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án A thì $\overrightarrow{QP}$ (2; 3; 0) nên đáp án A bị loại.
- Với đáp án B thì $\overrightarrow{QP}$ (-3; -4; 2) nên đáp án B bị loại.
- Với đáp án C thì $\overrightarrow{QP}$ (-2; -3; 0) = $\overrightarrow{MN}$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1.2*: (Từ phải qua trái): Để MNPQ là hình bình hành, điều kiện là $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, với $\overrightarrow{MN}$ (-2; -3; 0).

Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án D thì $\overrightarrow{QP}(2; 3; 8)$ nên đáp án D bị loại.
- Với đáp án C thì $\overrightarrow{QP}(-2; -3; 0) = \overrightarrow{MN}$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2.1*: (Từ trái qua phải): Để MNPQ là hình bình hành, điều kiện là MP và NQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, với trung điểm I của MP là I(1; 0; 2).

Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án A thì trung điểm của NQ có tọa độ (-1; -3; 2) nên đáp án A bị loại.
- Với đáp án B thì trung điểm của NQ có tọa độ $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ nên đáp án B bị loại.
- Với đáp án C thì trung điểm của NQ có tọa độ $(1; 0; 2) \equiv I$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2.2*: (Từ phải qua trái): Để MNPQ là hình bình hành, điều kiện là MP và NQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, với trung điểm I của MP là I(1; 0; 2).

Ta lần lượt đánh giá:

- Với đáp án D thì trung điểm của NQ có tọa độ (-1; -3; -2) nên đáp án D bị loại.
- Với đáp án C thì trung điểm của NQ có tọa độ $(1; 0; 2) \equiv I$.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ **Nhận xét:** Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận 1,* chúng ta đi tìm tọa độ điểm Q thông qua điều kiện $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ để MNPQ là hình bình hành.
- *Trong cách giải tự luận 2,* chúng ta đi tìm tọa độ điểm Q thông qua điều kiện MP và NQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường để MNPQ là hình bình hành.
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1.1 và 1.2,* chúng ta kiểm tra điều kiện $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ theo hướng từ trái qua phải và từ phải qua trái.
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 2.1 và 2.2,* chúng ta kiểm tra điều kiện MP và NQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đường theo hướng từ trái qua phải và từ phải qua trái.

Bài 26. Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, tích có hướng $[\vec{i}, \vec{j}]$ bằng:

A. $\vec{i}$. B. $\vec{j}$. C. $\vec{k}$. D. (1; 1; 1).

Đáp số trắc nghiệm C.

Bài 27. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a}(1; 0; -1)$, $\vec{b}(2; 1; 1)$. Vectơ nào sau đây vuông góc với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$:

A. (1; 1; 0). B. (0; 1; 0). C. (1; -3; 1). D. (1; 3; 1).

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Vectơ vuông góc với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{vmatrix}\right) = (1; -3; 1)$$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với vectơ trong đáp án A, ta có:

  $\vec{a}.(1; 1; 0) = (1; 0; -1).(1; 1; 0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

- Với vectơ trong đáp án B, ta có:

  $\vec{a}.(0; 1; 0) = (1; 0; -1).(0; 1; 0) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp (0; 1; 0)$, thỏa mãn

  $\vec{b}.(0; 1; 0) = (2; 1; 1).(0; 1; 0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

- Với vectơ trong đáp án C, ta có:

  $\vec{a}.(1; -3; 1) = (1; 0; -1).(1; -3; 1) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp (1; -3; 1)$, thỏa mãn

  $\vec{b}.(1; -3; 1) = (2; 1; 1).(1; -3; 1) = 0 \Rightarrow \vec{b} \perp (1; -3; 1)$, thỏa mãn

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

- Với vectơ trong đáp án B, ta có:

  $\vec{a}.(1; 3; 1) = (1; 0; -1). (1; 3; 1) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp (1; 3; 1)$, thỏa mãn

  $\vec{b}.(1; 3; 1) = (2; 1; 1). (1; 3; 1) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

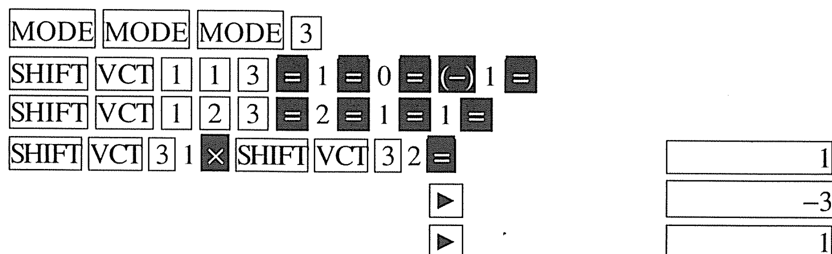
- Với vectơ trong đáp án C, ta có:

  $\vec{a}.(1; -3; 1) = (1; 0; -1).(1; -3; 1) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp (1; -3; 1)$, thỏa mãn

  $\vec{b}.(1; -3; 1) = (2; 1; 1).(1; -3; 1) = 0 \Rightarrow \vec{b} \perp (1; -3; 1)$, thỏa mãn

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:



Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 28. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a}(-2; 3; 1)$, $\vec{b}(5; -7; 0)$ và $\vec{c}(3; -2; 4)$. Vectơ $[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}]$ có tọa độ là:

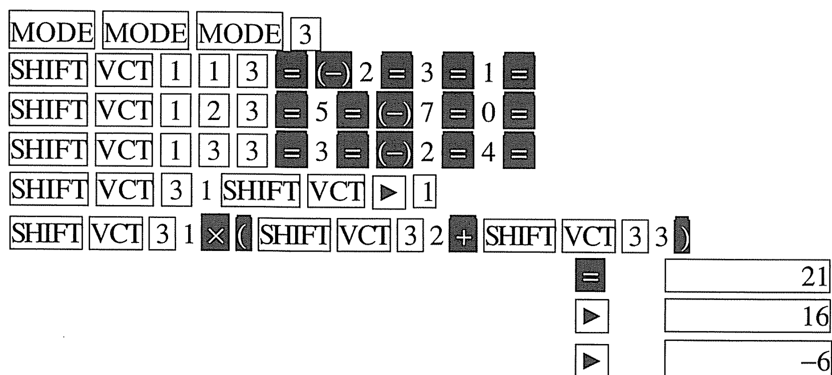
A. (21; 16; 6). B. (21; 16; -6). C. (21; -16; -6). D. (-21; 16; -6).

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $\vec{b}+\vec{c} = (5; -7; 0) + (3; -2; 4) = (8; -9; 4)$,

$$[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -9 \end{vmatrix}\right) = (21; 16; -6)$$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng việc sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:* Bằng cách thực hiện theo thứ tự:



Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 29. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(1; 1; 1), B(5; 1; -2), C(7; 9; 1). Diện tích của ΔABC bằng:

A. $\sqrt{481}$ (đvdt). B. $\sqrt{461}$ (đvdt). C. $\sqrt{441}$ (đvdt). D. $\sqrt{421}$ (đvdt).

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có: $\overrightarrow{AB}(4; 0 -3)$ và $\overrightarrow{AC}(6; 8; 0)$,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\begin{vmatrix}0 & -3\\8 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-3 & 4\\0 & 6\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}4 & 0\\6 & 8\end{vmatrix}\right)\right|$$

$= \frac{1}{2}|(24; -18; 32)| = \sqrt{481}$ (đvdt), ứng với đáp án A.

➢ ***Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:*** Ta có:

$\overrightarrow{AB}(4; 0 -3)$ và $\overrightarrow{AC}(6; 8; 0)$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}|(24; -18; 32)| = \sqrt{481}$ (đvdt),

bằng cách ấn:

MODE MODE MODE 3	
SHIFT VCT 1 1 3 = 4 = 0 = (–) 3 =	
SHIFT VCT 1 2 3 = 6 = 8 = 0 =	
SHIFT VCT 3 1 X SHIFT VCT 3 2 =	24
▶	−18
▶	32
SHIFT Abs SHIFT VCT 3 4 =	43.8634
÷ 2 =	21.9317

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 30. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7), D(-5; -4; 8). Thể tích của tứ diện ABCD bằng:

A. $\frac{55}{3}$ (đvtt). B. 20(đvtt). C. $\frac{65}{3}$ (đvtt). D. $\frac{70}{3}$ (đvtt).

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta lần lượt có: $\overrightarrow{AB}(2; -2; -3)$, $\overrightarrow{AC}(4; 0; 6)$, $\overrightarrow{AD}(-7; -7; 7)$,

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix}-2 & -3\\0 & 6\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-3 & 2\\6 & 4\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & -2\\4 & 0\end{vmatrix}\right) = (-12; -24; 8),$$

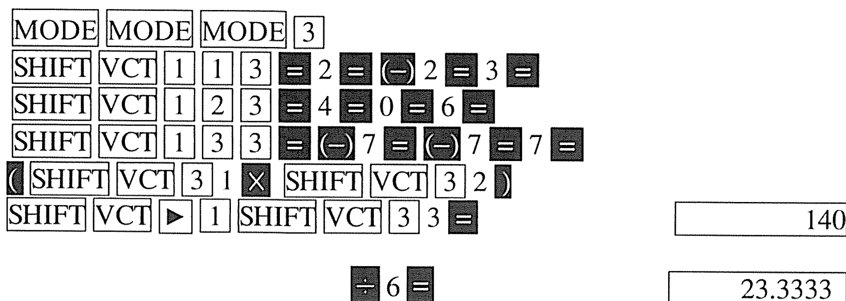
$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}], \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}|(-12; -24; 8).(-7; -7; 7)| = \frac{1}{6}.140$$

$= \frac{70}{3}$, ứng với đáp án D.

➢ ***Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS:*** Ta có:

$\overrightarrow{AB}(2; -2; -3)$, $\overrightarrow{AC}(4; 0; 6)$, $\overrightarrow{AD}(-7; -7; 7)$,

$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}], \overrightarrow{AD}\right| = \frac{70}{3}$, ứng với đáp án D bằng cách ấn:



Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 31. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, mặt cầu: (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$ có tâm I và bán kính R là:

A. I(1; -2; 3) và $R = \sqrt{12}$.
B. I(-1; 2; -3) và R = 16.
C. I(1; -2; 3) và R = 4.
D. I(-1; 2; -3) và R = 4.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có a = 1, b = -2 và c = 3 nên có: $a^2 + b^2 + c^2 - d = 16 > 0$ từ đó suy ra, tâm I(1; -2; 3) và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 4$.

Bài 32. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, mặt cầu: (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$ có tâm I và bán kính R là:

A. I(4; -1; 0) và R = 16.
B. I(4; -1; 0) và R = 4.
C. I(-4; 1; 0) và R = 16.
D. I(-4; 1; 0) và R = 4.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có a = 4, b = -1, c = 0 và d = 1 nên: $a^2 + b^2 + c^2 - d = 16$ từ đó, suy ra mặt cầu có tâm I(4; -1; 0) và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 4$.

Bài 33. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, mặt cầu: (S): $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 3y + 15z - 2 = 0$ có tâm I và bán kính R là:

$I\left(1; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và $R = \frac{49}{6}$.
$I\left(1; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và $R = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.
$I\left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và $R = \frac{49}{6}$.
$I\left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và $R = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y + 5z - \frac{2}{3} = 0.$$

Ta có a = -1, b = $\frac{1}{2}$, c = -$\frac{5}{2}$ và d = -$\frac{2}{3}$ nên: $a^2 + b^2 + c^2 - d = \frac{49}{6} > 0$ từ đó, suy ra mặt cầu có tâm $I\left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.

Bài 34. Mặt cầu (S) với tâm I(-1; 3; 0) và bán kính R = 3 có phương trình:

A. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 3$.
B. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$.
C. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 3$.
D. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 9$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(-1; 3; 0) \\ R = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$$, ứng với đáp án B.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta có: $M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow IM = R \Leftrightarrow IM^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$.

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

Bài 35. Mặt cầu (S) với tâm I(2; -1; 3) và đi qua điểm A(3; -4; 4) có phương trình:

A. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 11$.
B. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = \sqrt{11}$.
C. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 11$.
D. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = \sqrt{11}$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Mặt cầu (S) có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2; -1; 3) \\ \text{Đi qua } A(3; -4; 4) \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2; -1; 3) \\ R = IA = \sqrt{11} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (S): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 11$, ứng với đáp án C.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta có: $M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow IM = IA \Leftrightarrow IM^2 = IA^2$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 11$.

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Mặt cầu có tâm I(2; -1; 3) nên các đáp án A và B bị loại.

▪ Với đáp án D thì: $(3 - 2)^2 + (-4 + 1)^2 + (4 - 3)^2 = \sqrt{11} \Leftrightarrow 11 = \sqrt{11} \Rightarrow A \notin (S)$

$\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận 1,* chúng ta đi xác định tâm và bán kính của mặt cầu (S), từ đó nhận được phương trình chính tắc của (S).
- *Trong cách giải tự luận 2,* chúng ta sử dụng phương pháp quĩ tích để xác định phương trình của (S).
- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* thông qua tọa độ tâm I chúng ta loại bỏ được các đáp án A và B. Cuối cùng, để lựa chọn được đáp án đúng chúng ta kiểm tra điều kiện (S) đi qua điểm A.

Bài 36. Mặt cầu (S) đường kính AB với A(1; 3; 2), B(3; 5; 0) có phương trình:

A. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 2$. B. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 + (z + 1)^2 = 3$.

C. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 + (z + 1)^2 = 2$. D. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 3$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Mặt cầu (S) có:

$$\text{(S)}: \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm AB} \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AB}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \text{(S)}: \begin{cases} \text{Tâm } I(2; 4; 1) \\ R = \sqrt{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (S): $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 3$, ứng với đáp án D.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Ta có:

$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

$(1 - x; 3 - y; 2 - z).(3 - x; 5 - y; -z) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - x).(3 - x) + (3 - y).(5 - y) + (2 - z).(-z) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 2z + 18 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 3$.

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

➢ *Lời giải tự luận 3:* Ta có:

$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow$ DMAB vuông tại M $\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 2z + 18 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 3$.

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

- Ta có: $2R = AB = \sqrt{(3-1)^2 + (5-3)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ Các đáp án A và C bị loại.

■ Với đáp án B thì:

$(1 + 2)^2 + (3 + 4)^2 + (2 + 1)^2 = 3 \Leftrightarrow 67 = 3 \Rightarrow A \notin (S) \Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

■ *Trong cách giải tự luận 1,* chúng ta đi xác định tâm và bán kính của mặt cầu (S), từ đó nhận được phương trình chính tắc của (S).

■ *Trong cách giải tự luận 2 và 3,* chúng ta sử dụng phương pháp quĩ tích để xác phương trình của (S) và chuyển nó về dạng chính tắc để lựa chọn được đáp án đúng.

■ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử,* thông qua độ dài của bán kính R, chúng ta loại bỏ được các đáp án A và B. Cuối cùng, để lựa chọn được đáp án đúng, chúng ta kiểm tra điều kiện (S) đi qua điểm A.

Bài 37. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A(1; 3; 2), B(3; 5; 0) và có tâm thuộc trục Ox có phương trình:

A. $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 50$.

B. $(x + 2)^2 + y^2 + z^2 = 22$.

C. $(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 29$.

D. $(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 5$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Mặt cầu (S) có tâm $I \in Ox$, có dạng: (S): $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Vì $A, B \in (S)$ nên ta có hệ: $\begin{cases}(1-a)^2+3^2+2^2=R^2\\(3-a)^2+5^2=R^2\end{cases} \Rightarrow a = 5$ và $R^2 = 29$.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng: (S): $(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 29$.

➢ *Lời giải tự luận 2:* Mặt cầu (S) có tâm I(a; 0; 0) và vì nó đi qua A và B nên:

$IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (1 - a)^2 + 3^2 + 2^2 = (3 - a)^2 + 5^2 \Leftrightarrow a = 5$.

Vậy, ta có: (S): $\begin{cases}\text{Tâm I}\\\text{Đi qua A}\end{cases} \Leftrightarrow$ (S): $\begin{cases}\text{Tâm I(5; 0; 0)}\\R = IA = \sqrt{29}\end{cases} \Leftrightarrow$ (S): $(x - 5)^2 + y^2 + z^2 = 29$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

■ Với mặt cầu trong đáp án A, có tâm $I(0; 2; 0) \notin Ox$ nên đáp án A bị loại.

■ Với mặt cầu trong đáp án B có tâm thuộc Ox, ta thay tọa độ điểm A, B vào và nhận thấy:

$(1 + 2)^2 + 3^2 + 2^2 = 22 \Leftrightarrow 22 = 22$, đúng.

$(3 + 2)^2 + 5^2 = 22 \Leftrightarrow 50 = 22$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

▪ Với mặt cầu trong đáp án C có tâm thuộc Ox, ta thay tọa độ điểm A, B vào và nhận thấy:

$(1 - 5)^2 + 3^2 + 2^2 = 29 \Leftrightarrow 29 = 29$, đúng.

$(3 - 5)^2 + 5^2 = 29 \Leftrightarrow 29 = 29$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với mặt cầu trong đáp án D có tâm thuộc Ox, ta thay tọa độ điểm A, B vào và nhận thấy:

$(1 - 5)^2 + 3^2 + 2^2 = 5 \Leftrightarrow 29 = 5$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

▪ Với mặt cầu trong đáp án C có tâm thuộc Ox, ta thay tọa độ điểm A, B vào và nhận thấy:

$(1 - 5)^2 + 3^2 + 2^2 = 29 \Leftrightarrow 29 = 29$, đúng.

$(3 - 5)^2 + 5^2 = 29 \Leftrightarrow 29 = 29$, đúng.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 38. Mặt cầu (S) đi qua ba điểm A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1) và tâm I nằm trên mặt phẳng (P): $x + y + z - 3 = 0$ có phương trình:

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 1 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Giả sử phương trình mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$.

Vì A, B, C $\in$ (S) và I $\in$ (P) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 1 - 2a + d = 0 \\ 1 - 2b + d = 0 \\ 1 - 2c + d = 0 \\ a + b + c - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 1, c = 1, d = 1, \text{ thỏa mãn điều kiện } (*).$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1.1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với mặt cầu trong đáp án A không đi qua điểm B nên đáp án A bị loại.

▪ Với mặt cầu trong đáp án B không đi qua điểm A nên đáp án B bị loại.

▪ Với mặt cầu trong đáp án C không đi qua điểm A nên đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1.2* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với mặt cầu trong đáp án A có tâm I(1; 0; 0) ≡ A nên đáp án A bị loại.

▪ Với mặt cầu trong đáp án B có tâm I(0; 1; 0) ≡ B nên đáp án B bị loại.

▪ Với mặt cầu trong đáp án C có tâm I(0; 0; 1) ≡ C nên đáp án C bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với mặt cầu trong đáp án D có tâm I(1; 1; 1) thuộc (P), ta thay tọa độ điểm A, B, C vào và nhận thấy:

$1 - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng $\Leftrightarrow A \in (S)$

$1 - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng $\Leftrightarrow B \in (S)$

$1 - 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng $\Leftrightarrow C \in (S)$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 39. Mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp S.ABC với S(3; 1; -2), A(5; 3; -1), B(2; 3; -4), C(1; 2; 0) có phương trình:

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 7y + 8 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 7y + 3z + 14 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 5x + 3z + 21 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 7y + 3z + 29 = 0$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Giả sử mặt cầu (S) có phương trình:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$.

Điểm S, A, B, C ∈ (S), ta được:

$$\begin{cases} 6a + 2b - 4c - d = 14 \\ 10a + 6b - 2c - d = 35 \\ 4a + 6b - 8c - d = 29 \\ 2a + 4b - d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5/2 \\ b = 7/2 \\ c = -3/2 \\ d = 14 \end{cases}$$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy, phương trình mặt cầu (S) có dạng:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 5x - 7y + 3z + 14 = 0$.

➢ *Hướng dẫn lời giải tự luận 2:* Nhận xét rằng:

$SA = SB = SC = 3, AB = BC = CA = \sqrt{18}$

suy ra S.ABC là hình chóp tam giác đều.

➢ *Hướng dẫn Lời giải tự luận 3:* Nhận xét rằng:

SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau.

➢ *Hướng dẫn Lời giải tự luận 4:* Nhận xét rằng SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và bằng nhau, do đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp chính là mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương sinh bởi SA, SB, SC là $SBDC.AB_1D_1C_1$.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* - Học sinh tự thực hiện.

§2 PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Định nghĩa 1: Hai vectơ khác vec tơ không $\vec{a}, \vec{b}$ gọi là *cặp vectơ chỉ phương* (vtcp) của mặt phẳng (P) nếu chúng không cộng tuyến và các đường thẳng chứa chúng đều song song với (P) (hoặc nằm trên (P)).

Chú ý:

(i). Mỗi mặt phẳng có nhiều cặp vectơ chỉ phương.

(ii). Hai mặt phẳng phân biệt có cùng một cặp vectơ chỉ phương thì song song với nhau.

(iii). Một mặt phẳng (P) được hoàn toàn xác định nếu biết một điểm M và cặp vtcp $(\vec{a}; \vec{b})$ của nó.

2. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

Định nghĩa 2: Vectơ $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P) $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \perp (P) \end{cases}$.

Nhận xét:

1. Nếu $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P) thì mọi vectơ $k\vec{n}$ với $k \neq 0$ đều là vtpt của mặt phẳng đó.

2. Nếu $\vec{n}$ là vtpt và $(\vec{a}; \vec{b})$ là cặp vtcp của mặt phẳng (P) thì: $\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\vec{a}; \vec{b}]$.

3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Mặt phẳng (P) trong không gian Oxyz có phương trình tổng quát:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ (1)

nhận vectơ $\vec{n}(A, B, C)$ làm vtpt.

Một số trường hợp đặc biệt

1. Nếu $D = 0$, mặt phẳng (P) đi qua gốc toạ độ.

2. Nếu $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$, mặt phẳng (P): $By + Cz + D = 0$ sẽ chứa hoặc song song với trục x'Ox.

Tương tự:

a. Mặt phẳng (P): $Ax + Cz + D = 0$ sẽ chứa hoặc song song với trục y'Oy.

b. Mặt phẳng (P): $Ax + By + D = 0$ sẽ chứa hoặc song song với trục z'Oz.

3. Nếu $A = 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, mặt phẳng (P) có dạng (P): $Cz + D = 0$ sẽ chứa hoặc song song với trục x'Ox và y'Oy nên nó song song hoặc trùng với mặt phẳng xOy.

Tương tự:

a. Mặt phẳng (P): $Ax + D = 0$ sẽ song song hoặc trùng với mặt phẳng yOz,

b. Mặt phẳng (P): $By + D = 0$ sẽ song song hoặc trùng với mặt phẳng xOz.

Đặc biệt, các phương trình $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ theo thứ tự là phương trình của các mặt phẳng toạ độ yOz, xOz, xOy.

4. Nếu $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ thì bằng cách đặt: $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$ ta được:

(P): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$ (2)

Phương trình (2) gọi là *phương trình đoạn chắn* của mặt phẳng (P).

5. Chia hai vế của phương trình (1) cho $M = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Khi đó, đặt:

$A_0 = \frac{A}{M}, B_0 = \frac{B}{M}, C_0 = \frac{C}{M}, D_0 = \frac{D}{M}$ ta được:

(P): $A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0$ với $A_0^2 + B_0^2 + C_0^2 = 1.$ (3)

Phương trình (3) được gọi là *phương trình pháp dạng* của mặt phẳng (P).

4. Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

Cho điểm $M(x_M, y_M, z_M)$ và mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0.$

Khoảng cách hình học từ M đến (P) được tính bởi công thức:

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm A(-1; 2; 1) và hai mặt phẳng:

(α): $2x + 4y - 6z - 5 = 0$, (β): $x - 2y - 3z = 0$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

a. (β) đi qua A và song song với (α).

b. (β) không đi qua A và song song với (α).

c. (β) đi qua A và không song song với (α).

d. (β) không đi qua A và không song song với (α).

Đáp số trắc nghiệm D.

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm M(-1; 1; 1), N(2; 4; 3). Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (OMN) có tọa độ là:

A. (1; 5 ; 6). B. (1; -5; 6). C. (1; 6; -5). D. (6; 1; 5).

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của mặt phẳng (OMN), ta có:

$\overrightarrow{OM}(-1 ; 1 ; 1), \overrightarrow{ON}(2; 4; 3)$

$$\vec{n} = [\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right) = (-1; 5; -6)$$

chọn $\vec{n}(1; -5; 6)$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với đáp án A thì:

$\vec{n}.\overrightarrow{OM} = -1 + 5 + 6 = 10 \neq 0 \Rightarrow \vec{n}$ không vuông góc với $\overrightarrow{OM} \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

▪ Với đáp án B thì:

$\vec{n}.\overrightarrow{OM} = -1 - 5 + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{OM}$

$\vec{n}.\overrightarrow{ON} = 2 - 20 + 18 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{ON}$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với đáp án D thì:

$\vec{n}.\overrightarrow{OM} = -6 + 1 + 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{OM}$

$\vec{n}.\overrightarrow{ON} = 12 + 4 + 15 = 31 \neq 0 \Rightarrow \vec{n}$ không vuông góc với $\overrightarrow{ON}$

$\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

▪ Với đáp án C thì:

$\vec{n}.\overrightarrow{OM} = -1 + 6 - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{OM}$

$\vec{n}.\overrightarrow{ON} = 2 + 24 - 15 = 11 \neq 0 \Rightarrow \vec{n}$ không vuông góc với $\overrightarrow{ON}$

$\Rightarrow$ Đáp án C bị loại.

- Với đáp án B thì:

$\vec{n}.\overrightarrow{OM} = -1 - 5 + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{OM}$

$\vec{n}.\overrightarrow{ON} = 2 - 20 + 18 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{ON}$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS*: Gọi $\vec{n}$ là một vtpt của mặt phẳng (OMN), ta có: $\overrightarrow{OM}(-1 ; 1 ; 1)$, $\overrightarrow{ON}(2; 4; 3)$

$\vec{n} = [\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}] = (-1; 5; -6)$

bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Thiết lập môi trường làm việc với vectơ cho máy tính bằng cách ấn:

[MODE] [MODE] [MODE] [3]

- Để nhập toạ độ cho vectơ $\overrightarrow{OM}$ và vectơ $\overrightarrow{ON}$ ta ấn:

[SHIFT] [VCT] [1] [1] [3] [=] [(–)] 1 [=] 1 [=] 1 [=]

[SHIFT] [VCT] [1] [2] [3] [=] 2 [=] 4 [=] 3 [=]

- Để tính toạ độ của $\vec{n}$ ta ấn:

[SHIFT] [VCT] [3] 1 [×] [SHIFT] [VCT] [3] 2 [=] → –1

[▶] → 5

[▶] → –6

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

- *Trong cách giải tự luận* chúng ta thực hiện tính tích có hướng của hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ dựa trên các định thức cấp 2.

- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1 và 2* chúng ta kiểm tra điều kiện để vectơ $\vec{n}$ vuông góc với các vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ dựa trên tích vô hướng.

- *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử với máy tính CASIO fx-570MS*, chúng ta sử dụng chức năng tính tích có hướng của hai vectơ của máy tính, điều này giúp giảm được thời gian.

Bài 3. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A(1; 2; 3) và có vtpt $\vec{n}(2; -1; 3)$ có phương trình:

A. (P): $2x - y + 3z - 4 = 0$. B. (P): $2x - y + 3z - 9 = 0$.

C. (P): $x - y + 3z - 4 = 0$. D. (P): $x - y + 3z - 9 = 0$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1;2;3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2;-1;3) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2.(x - 1) - 1.(y - 2) + 3.(z - 3) = 0$$

$\Leftrightarrow$ (P): $2x - y + 3z - 9 = 0$, ứng với đáp án B.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}$ (2; -1; 3) nên các đáp án C và D bị loại.
- Thay tọa độ của A(1; 2; 3) vào đáp án A, ta thấy:

$2.1 - 2 + 3.3 - 4 = 0 \Leftrightarrow 5 = 0 \Rightarrow A \notin (P) \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 4. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với A(2; 1; 4), B(-2; -3; 2) có phương trình:

A. (P): $2x + 2y + z - 3 = 0$.
B. (P): $2x + 2y + z - 1 = 0$.
C. (P): $x + 2y + 2z - 3 = 0$.
D. (P): $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua I là trung điểm AB} \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I(0;-1;3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{BA}(4;4;2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } I(0;-1;3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(2;2;1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $2x + 2(y + 1) + z - 3 = 0 \Leftrightarrow$ (P): $2x + 2y + z - 1 = 0$.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

- Với hai điểm A và B ta có $\overrightarrow{BA}$ (4; 4; 2)

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB phải có vtpt cùng phương với vectơ $\overrightarrow{BA}$, nên các đáp án C và D bị loại.

- Gọi I là trung điểm AB, ta có I(0; -1; 3), khi đó:
- Với đáp án A, ta thấy: $2.0 + 2.(-1) + 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow -2 = 0 \Rightarrow I \notin (P) \Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 5. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A(2; -1; 1) và có cặp vtcp $\vec{a}$ (2; -1; 2), $\vec{b}$ (3; -2; 1) có phương trình:

A. (P): $x - z - 1 = 0$.
B. (P): $x + 2y = 0$.
C. (P): $3x + 4y - z - 1 = 0$.
D. (P): $3x + 4y - z - 3 = 0$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases}\vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b}\end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix}-1 & 2 \\ -2 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 2 \\ 1 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & -1 \\ 3 & -2\end{vmatrix}\right) = (3; 4; -1).$$

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases}\text{qua } A(2;-1;1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(3;4;-1)\end{cases} \Leftrightarrow (P): 3.(x - 2) + 4.(y + 1) - 1.(z - 1) = 0$$

$\Leftrightarrow$ (P): $3x + 4y - z - 1 = 0$, ứng với đáp án C.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS*: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases}\vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b}\end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (3; 4; -1)$$

bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Thiết lập môi trường làm việc với vectơ cho máy tính bằng cách ấn:
  [MODE] [MODE] [MODE] [3]
- Để nhập toạ độ cho vectơ $\overrightarrow{OM}$ và vectơ $\overrightarrow{ON}$ ta ấn:
  [SHIFT] [VCT] [1] [1] [3] [=] 2 [=] [(–)] 1 [=] 2 [=]
  [SHIFT] [VCT] [1] [2] [3] [=] 3 [=] [(–)] 2 [=] 1 [=]
- Để tính toạ độ của $\vec{n}$ ta ấn:
  [SHIFT] [VCT] [3] 1 [×] [SHIFT] [VCT] [3] 2 [=] → 3
  [▶] → 4
  [▶] → −1

Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases}\text{qua } A(2;-1;1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(3;4;-1)\end{cases} \Leftrightarrow (P): 3.(x - 2) + 4.(y + 1) - 1.(z - 1) = 0$$

$\Leftrightarrow$ (P): $3x + 4y - z - 1 = 0$, ứng với đáp án C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với (P) cho bởi đáp án A có vtpt $\vec{n}(1; 0; -1)$ ta nhận thấy $\vec{n}$ không vuông góc với $\vec{b}$, nên đáp án A bị loại.

- Với (P) cho bởi đáp án B có vtpt $\vec{n}(1; 2; 0)$ ta nhận thấy $\vec{n}$ không vuông góc với $\vec{b}$, nên đáp án B bị loại.

▪ Với (P) cho bởi đáp án C có vtpt $\vec{n}(3; 4; -1)$ ta nhận thấy:

$\vec{n}.\vec{a} = 6 - 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{a}$

$\vec{n}.\vec{b} = 9 - 8 - 1 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{b}$

$3.2 + 4(-1) - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow A \in (P)$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với (P) cho bởi đáp án D có vtpt $\vec{n}(3; 4; -1)$ ta nhận thấy:

$3.2 + 4(-1) - 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow -2 = 0 \Rightarrow A \notin (P) \Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

▪ Với (P) cho bởi đáp án C có vtpt $\vec{n}(3; 4; -1)$ ta nhận thấy:

$\vec{n}.\vec{a} = 6 - 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{a}$

$\vec{n}.\vec{b} = 9 - 8 - 1 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{b}$

$3.2 + 4(-1) - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow A \in (P)$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

☞ Nhận xét: Như vậy, để lựa chọn được đáp án đúng cho bài toán trên thì:

▪ *Trong cách giải tự luận* chúng ta thực hiện tìm vtpt của mặt phẳng (P) thông qua tích có hướng của hai vtcp. Từ đó, thiết lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A với vtpt $\vec{n}$.

▪ *Trong cách giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx-570MS,* chúng ta tận dụng chức năng của máy tính để tính vtpt $\vec{n}$.

▪ *Trong cách lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* và *2* chúng ta cần kiểm tra ba điều kiện đó là: $A \in (P)$; $\vec{n} \perp \vec{a}$ và $\vec{n} \perp \vec{b}$.

Và với mỗi đáp án, nếu một trong ba điều kiện không thỏa mãn thì đáp án đó bị loại.

Bài 6. Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A(1; 1; 0), B(1; 0; 0) và C(0; 1; 1) có phương trình:

A. (P): $2x - y + z - 1 = 0$.
B. (P): $x + 2z - 1 = 0$.
C. (P): $x + z - 1 = 0$.
D. (P): $2x - y + z - 1 = 0$.

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận 1:* Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được:

$\overrightarrow{AB}(0; -1; 0)$ và $\overrightarrow{AC}(-1; 0; 1)$

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\right) = (-1; 0; -1).$$

Phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1;1;0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(-1;0;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + z - 1 = 0, \text{ ứng với đáp án C.}$$

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính CASIO fx – 570MS*: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\overrightarrow{AB}(0; -1; 0) \text{ và } \overrightarrow{AC}(-1; 0; 1) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; 0; -1)$$

bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Thiết lập môi trường làm việc với vectơ cho máy tính bằng cách ấn:

MODE MODE MODE 3

- Để nhập toạ độ cho vectơ $\overrightarrow{AB}$ và vectơ $\overrightarrow{AC}$ ta ấn:

SHIFT VCT 1 1 3 = 0 = (–) 1 = 0 =
SHIFT VCT 1 2 3 = (–) 1 = 0 = 1 =

- Để tính toạ độ của $\vec{n}$ ta ấn:

SHIFT VCT 3 1 × SHIFT VCT 3 2 = → –1
▶ → 0
▶ → –1

Phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A(1;1;0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(-1;0;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + z - 1 = 0, \text{ ứng với đáp án C.}$$

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì A, B, C thuộc (P), ta được:

$$\begin{cases} A + B + D = 0 \\ A + D = 0 \\ B + C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -D \\ B = 0 \\ C = -D \end{cases}$$

Từ đó, ta được:

$$(P): -Dx - Cz + D \Leftrightarrow (P): x + z - 1 = 0, \text{ ứng với đáp án C.}$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* (Từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

- Với (P) cho bởi đáp án A ta nhận thấy:

$$2.1 - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow A \in (P)$$

$$2.1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \Rightarrow B \notin (P) \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

▪ Với (P) cho bởi đáp án B ta nhận thấy:

$1 + 2.1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow A \in (P)$

$1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow B \in (P)$

$2.1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \Rightarrow C \notin (P) \Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

▪ Với (P) cho bởi đáp án C ta nhận thấy:

$1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow A \in (P)$

$1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow B \in (P)$

$1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow C \in (P)$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* (Từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với (P) cho bởi đáp án D ta nhận thấy:

$2.1 - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow A \in (P)$

$2.1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \Rightarrow B \notin (P) \Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

▪ Với (P) cho bởi đáp án C ta nhận thấy:

$1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow A \in (P)$

$1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow B \in (P)$

$1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow C \in (P)$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 7. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho ba điểm M(1 ; 0; 0), N(0 ; 2 ; 0) và P(0 ; 0 ; 3). Mặt phẳng (MNP) có phương trình:

A. $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.
B. $x + y + z - 6 = 0$.
C. $6x + 3y + 2z - 1 = 0$.
D. $6x + 3y + 2z + 1 = 0$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Vì M, N, P theo thứ tự thuộc các trục Ox, Oy, Oz nên phương trình mặt phẳng (MNP) có dạng:

$$(MNP): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow (MNP): 6x + 3y + 2z - 6 = 0, \text{ ứng với đáp án A.}$$

☞ Nhận xét: Ngoài cách giải trên, chúng ta đều biết rằng còn có thể thực hiện bài toán trên theo các cách (tương tự như trong bài 6) sau:

a. Lời giải tự luận 1;

b. *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx - 570MS;

c. Lời giải tự luận 2;

d. *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* (Từ trái qua phải);

e. *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* (Từ phải qua trái).

Bài 8. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho điểm I(1; 2; -5). Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của điểm I trên các trục Ox, Oy, Oz. phương trình mặt phẳng (MNP) là:

A. $10x - 5y + 2z - 1 = 0$.
B. $10x + 5y - 2z - 10 = 0$.
C. $10x - 5y - 2z - 1 = 0$.
D. $10x + 5y - 2z + 10 = 0$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Vì M(1; 0; 0), N(0; 2; 0), P(0; 0; -5) theo thứ tự thuộc các trục Ox, Oy, Oz nên phương trình mặt phẳng (MNP) có dạng:

$$(MNP): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} - \frac{z}{5} = 1 \Leftrightarrow (MNP): 10x + 5y - 2z - 10 = 0,$$ ứng với đáp án B.

☞ **Nhận xét:** Ngoài cách giải trên, chúng ta đều biết rằng còn có thể thực hiện bài toán trên theo các cách (tương tự như trong bài 6) sau:

a. Lời giải tự luận 1;

b. *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx - 570MS;

c. Lời giải tự luận 2;

d. *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1:* (Từ trái qua phải);

e. *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2:* (Từ phải qua trái).

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x - 2y + z + 6 = 0$ và điểm M(1; 1; 0). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng:

A. 6.
B. 2.
C. 0.
D. 3.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Ta có:

$$d(M, (P)) = \frac{|2 - 2 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} = 2,$$ ứng với đáp án B.

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P) có phương trình: (P): $x + 2y - 2z + 5 = 0$. Khoảng cách từ M(t; 2; -1) đến mặt phẳng (P) bằng 1 khi và chỉ khi:

A. t = -8. B. $\left[\begin{array}{l} t=-14 \\ t=-8 \end{array}\right.$. C. t = -14. D. $\left[\begin{array}{l} t=-20 \\ t=-2 \end{array}\right.$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có:

$$1 = d(M, (P)) = \frac{|t+4+2+5|}{\sqrt{1+2^2+(-2)^2}} \Leftrightarrow |t+11| = 3$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+11=-3 \\ t+11=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-14 \\ t=-8 \end{array}\right., \text{ ứng với đáp án B.}$$

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử* - Học sinh tự thực hiện.

Bài 11. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $4x - 3y + 2z + 28 = 0$ và điểm I(0; 1; 2). Phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) là:

A. $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 29$.

B. $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = \frac{29}{3}$.

C. $x^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 29$.

D. $x^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = \frac{29}{3}$.

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ *Lời giải tự luận:* Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) nên có bán kính là:

$$R = d(I, (P)) = \frac{|-3+4+28|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+2^2}} = \sqrt{29}.$$

Mặt cầu (S) có: (S): $\begin{cases} \text{Tâm } I(0; 1; 2) \\ R = \sqrt{29} \end{cases} \Leftrightarrow$ (S): $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 29$, ứng với đáp án A.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng trích lược tự luận:* Ta lần lượt đánh giá:

- Mặt cầu (S) có tâm I(0; 1; 2) nên các đáp án C và D bị loại.
- Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) nên có bán kính là:

$$R = d(I, (P)) = \frac{|-3+4+28|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+2^2}} = \sqrt{29} \Rightarrow \text{Đáp án B bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 12. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho: (P): $3x + 4z + 12 = 0$ và (S): $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$.
Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. (P) đi qua tâm mặt cầu (S).

B. (P) cắt (S) theo một đường tròn và (P) không qua tâm (S).

C. (P) tiếp xúc mặt cầu (S).

D. (P) không cắt (S).

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Mặt cầu (S) có tâm I(0; 0; 2) và bán kính R = 1, từ đó suy ra:

$$I(0; 0; 2) \notin (P),\ d(I, (P)) = \frac{|8+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 4 > R.$$

Vậy, ta có kết luận (P) không cắt (S) ứng với đáp án D.

Bài 13. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng:

(P) $x + y + \sqrt{2} = 0$ và (Q): $-x + z + \sqrt{3} = 0$.

Góc giữa hai mặt phẳng (P) *và* (Q) *là:*

A. 120^0. B. 30^0. C. 90^0. D. 60^0.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Gọi a là góc giữa (P) và (Q), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|-1|}{\sqrt{1+1}.\sqrt{1+1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 30^0,$$ ứng với đáp án B.

Bài 14. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$.

Mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu (S) *tại điểm* M(0; 1; -2) *là:*

A. $2x - 2y + z - 4 = 0$.

B. $2x - y - z = 0$.

C. $2x - 3z - 6 = 0$.

D. $2x - 2y + z + 4 = 0$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Mặt cầu (S) có tâm I(2 ; -1 ; -1) và bán kính R = 3.

Mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu (S) tại điểm M(0; 1; -2) là:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M(0; 1; -2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{MI}(2; -2; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x - 2(y - 1) + (z + 2) = 0$$

$\Leftrightarrow$ (P): 2x - 2y + z + 4 = 0, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử kết hợp tự luận*: Mặt cầu (S) có tâm I(2; -1; -1) và bán kính R = 3.

Ta lần lượt đánh giá:

- Mặt phẳng (P) cho trong đáp án A không đi qua M nên đáp án A bị loại.
- Mặt phẳng (P) cho trong đáp án B không đi qua M nên đáp án B bị loại.
- Mặt phẳng (P) cho trong đáp án C đi qua M và ta có:

$$d(I, (P)) = \frac{|4+3-6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \neq R \Rightarrow \text{Đáp án C bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

§3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Định nghĩa 1: Một vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ gọi là vectơ chỉ phương (viết tắt vtcp) của đường thẳng (d) nếu giá của $\vec{a}$ song song hoặc trùng với (d).

Nhận xét:

- Nếu $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d) thì mọi vectơ $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ đều là vtpt của (d).
- Một đường thẳng được hoàn toàn xác định khi biết một vtcp của nó và một điểm mà nó đi qua.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1; a_2; a_3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Phương trình (1) với điều kiện $a_1^2 + a_3^2 + a_3^2 > 0$ được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng.

Các trường hợp riêng:

1. Nếu $a_1 = 0$, ta được:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

là đường thẳng có vtcp $\vec{a}(0; a_2; a_3)$ do đó nó vuông góc với Ox (song song với mặt phẳng Oyz), cắt Ox tại điểm có hoành độ x_0.

2. Nếu $a_2 = 0$, ta được:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

là đường thẳng có vtcp $\vec{a}(a_1; 0; a_3)$ do đó nó vuông góc với Oy (song song với mặt phẳng Oxz), cắt Oy tại điểm có tung độ y_0.

3. Nếu $a_3 = 0$, ta được:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t, t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 \end{cases}$$

là đường thẳng có vtcp $\vec{a}(a_1; a_2; 0)$ do đó nó vuông góc với Oz (song song với mặt phẳng Oxy), cắt Oz tại điểm có cao độ z_0.

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1; a_2; a_3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Từ đó, đường thẳng (d) đi qua hai điểm $M_1(x_1, y_1, z_1)$ và $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1; y_1; z_1) \\ \text{Qua } M_2(x_2; y_2; z_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

4. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Vì đường thẳng (d) trong không gian có thể xem là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) nào đó, nên phương trình tổng quát của (d) có dạng:

$$(d): \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (2) \end{cases} \text{ với điều kiện } A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2.$$

trong đó (1), (2) theo thứ tự là phương trình của mặt phẳng (P_1), (P_2).

Khi đó, một vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng đó được xác định bởi:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

5. Góc giữa hai đường thẳng

Gọi $\alpha = g((d_1),(d_2))$, $0 \leq a \leq 90^0$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ theo thứ tự là vtcp của (d_1), (d_2), khi đó:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}.$$

Nhận xét rằng $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.

6. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Trong không gian Oxyz, cho điểm M và đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}$. Khi đó khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d) được cho bởi:

$d(M, (d)) = \dfrac{|[\overrightarrow{MM_0}, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}$, trong đó M_0 là điểm bất kỳ thuộc (d).

7. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Định lý 2: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng chéo nhau (d_1), (d_2) theo thứ tự có vtcp $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$. Khi đó khoảng cách giữa (d_1), (d_2) được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{|[\vec{a_1}, \vec{a_2}].\overrightarrow{M_1M_2}|}{|[\vec{a_1}, \vec{a_2}]|},$$

trong đó M_1, M_2 là các điểm bất kỳ theo thứ tự thuộc (d_1), (d_2).

 CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng (d):

A. (-2; 1; 2). B. (-2; 1; 1). C. (2; -1; -1). D. (2; -1; -2).

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Hướng dẫn*: Tọa độ vtcp của đường thẳng (d) cho dưới dạng tham số chính là hệ số của t ở hệ phương trình đó.

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = -t - 2 \\ 2y = 2 + 6t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng (d):

A. (-1; 3; 0). B. (-2; 1; 0). C. (-1; 6; 0). D. (2; -6; 0).

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lời giải tự luận:*** Biến đổi phương trình tham số của đường thẳng về dạng:

$$(d): \begin{cases} x = -2 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{vtcp } \vec{a}(-1; 3; 0), \text{ ứng với đáp án A.}$$

☞ Nhận xét: Một vài học sinh khi thực hiện bài toán trên chỉ lưu ý tới hệ số của t nên lựa chọn đáp án C, hãy ghi nhớ rằng, với phương trình tham số của đường thẳng thì hệ số của x, y, z luôn bằng 1.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} -x = 3t + 2 \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng (d):

A. (3; -1; 3). B. (-3; - 1; 0). C. (3; - 1; 0). D. (-3; 1; 3).

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Biến đổi phương trình tham số của đường thẳng về dạng:

$$(d): \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{vtcp } \vec{a}\,(-3; -1; 0), \text{ ứng với đáp án A.}$$

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = z + 8.$$

Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng (d):

A. (2; -3; 0). B. (-2; 3; 0). C. (2; -3; 1). D. (-2; -3; -1).

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Biến đổi phương trình của đường thẳng về dạng:

$$(d): \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+8}{1} \Rightarrow \text{vtcp } \vec{a}\,(2; -3; 1), \text{ ứng với đáp án C.}$$

Bài 5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x+1}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{z-2}{5}.$$

Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng (d):

A. (2; 3; 5). B. (-2; -3; -5). C. (-2; 3; -5). D. (2; -3; 5).

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Biến đổi phương trình của đường thẳng về dạng:

$$(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{5} \Rightarrow \text{vtcp } \vec{a}\,(2; -3; 5), \text{ ứng với đáp án D.}$$

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{1-x}{2} = 2y + 1 = \frac{2z-1}{-2}.$$

Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng (d):

A. (2; 1; -2). B. (-2; 1; -2). C. $\left(-2; \frac{1}{2}; -1\right)$. D. $\left(-2; \frac{1}{2}; -2\right)$

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Biến đổi phương trình của đường thẳng về dạng:

$$(d): \frac{x-1}{-2} = \frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-1} \Rightarrow \text{vtcp } \vec{a}\left(-2; \frac{1}{2}; -1\right)$$, ứng với đáp án C.

Bài 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ 3x + y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng (d):

A. (1; -1; -1). B. (4; 3; 3). C. (3; 11; 4). D. (3; -11; 4).

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lời giải tự luận:* Ta có vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng (d) được cho bởi:

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) = (3; 11; 4)$$, ứng với đáp án C.

➢ *Lời giải tự luận kết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Bằng cách thực hiện theo thứ tự:

- Thiết lập môi trường làm việc với vectơ cho máy tính bằng cách ấn:

[MODE] [MODE] [MODE] [3]

- Để nhập toạ độ cho vectơ (1; -1; 2) và vectơ (3; 1; -5) ta ấn:

[SHIFT] [VCT] [1] [1] [3] [=] 1 [=] [(–)] 1 [=] 2 [=]

[SHIFT] [VCT] [1] [2] [3] [=] 3 [=] 1 [=] [(–)] 5 [=]

- Để tính toạ độ của $\vec{a}$ ta ấn:

[SHIFT] [VCT] [3] 1 [×] [SHIFT] [VCT] [3] 2 [=]	3
[▶]	11
[▶]	4

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 8. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = -t - 2 \\ y = 2 + 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$$

Đường thẳng (d) đi qua điểm nào sau đây:

A. (-2; 1; 0). B. (2; -1; 0). C. (0; -2; 0). D. (2; 1; 0).

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với điểm cho bởi đáp án A, ta có:

$$\begin{cases} -2 = -t - 2 \\ 1 = 2 + 2t \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$, vô nghiệm ⇒ Đáp án A bị loại.

▪ Với điểm cho bởi đáp án B, ta có:

$$\begin{cases} 2 = -t - 2 \\ -1 = 2 + 2t \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$, vô nghiệm ⇒ Đáp án B bị loại.

▪ Với điểm cho bởi đáp án C, ta có:

$$\begin{cases} 0 = -t - 2 \\ -2 = 2 + 2t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -2.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với điểm cho bởi đáp án D, ta có:

$$\begin{cases} 2 = -t - 2 \\ 1 = 2 + 2t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$, vô nghiệm ⇒ Đáp án D bị loại.

▪ Với điểm cho bởi đáp án C, ta có:

$$\begin{cases} 0 = -t - 2 \\ -2 = 2 + 2t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -2.$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

Bài 9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}.$$

Đường thẳng (d) *đi qua điểm nào sau đây*:

A. (2; -1; 5). **B.** (4; -1; 5). **C.** (4; 1; 5). **D.** (4; -1; -5).

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với điểm cho bởi đáp án A, ta có:

$$\frac{2-1}{3} = \frac{-1+3}{2} = \frac{5-1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = 1 = 1$$, vô nghiệm ⇒ Đáp án A bị loại.

■ Với điểm cho bởi đáp án B, ta có:

$$\frac{4-1}{3}=\frac{-1+3}{2}=\frac{5-1}{4} \Leftrightarrow 1 = 1 = 1\text{, thỏa mãn.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái) - Học sinh tự thực hiện.

Bài 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x-y+z-3=0 \\ 2x+y-3z+2=0 \end{cases}$$

Đường thẳng (d) *đi qua điểm nào sau đây*:

A. (1; -1; 1). **B.** (0; 0; 3). **C.** (2; 0; 1). **D.** (3; 1; 1).

Đáp số trắc nghiệm A.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

■ Với điểm cho bởi đáp án A, ta có:

$$\begin{cases} 1+1+1-3=0 \\ 2-1-3+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \text{ thỏa mãn.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án A là đúng đắn.

Bài 11. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}, t\in \mathbb{R}.$$

Phương trình nào sau đây cũng là phương trình của đường thẳng (d)?

A. $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-t \\ z=3+t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=2t \\ y=1+t \\ z=2+t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=4+2t \\ y=1-t \\ z=4+t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=4-2t \\ y=-1+t \\ z=4-t \end{cases}$

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử:*** Ta lần lượt đánh giá:

■ Đường thẳng (d) có một vtcp $\vec{a}$ (2; -1; 1) nên các đáp án A và B bị loại.

■ Đường thẳng (d) đi qua điểm M(0; 1; 2), thay tọa độ của M vào phương trình đường thẳng trong C ta thấy:

$$\begin{cases} 0=4+2t \\ 1=1-t \\ 2=4+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=0 \\ t=-2 \end{cases}, \text{ vô nghiệm} \Rightarrow \text{Đáp án C bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 12. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho điểm M(-2; 1; 1) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với đường thẳng (d) là:

A. $2x + y - z + 4 = 0$.
B. $2x - y + z + 4 = 0$.
C. $4x - 2y + 2z + 7 = 0$.
D. $x + y - z + 2 = 0$.

Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luận:* Gọi $\vec{a}$ là một vtcp của (d), ta có $\vec{a}(2; -1; 1)$. Khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M(-2; 1; 1) \\ \text{vtpt } \vec{a}(2; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2.(x + 2) - 1.(y - 1) + 1.(z - 1) = 0$$

$\Leftrightarrow$ (P): $2x - y + z + 4 = 0$, ứng với đáp án B.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Mặt phẳng cho trong đáp án A đi qua M nhưng có vtpt $\vec{n}(2; 1; -1)$ nên không thể vuông góc với (d), do đó đáp án A bị loại.

▪ Mặt phẳng cho trong đáp án B đi qua M và có vtpt $\vec{n}(2; -1; 1)$ nên vuông góc với (d), do đó nó thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án B là đúng đắn.

Bài 13. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M(1; 2; 3) và đường thẳng (d): $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Mặt phẳng chứa điểm M và đường thẳng (d) có phương trình:

A. $5x + 2y - 3z + 1 = 0$.
B. $2x + 3y - 5z = 0$.
C. $2x + 3y - 5z + 7 = 0$.
D. $5x + 2y - 3z = 0$.

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Mặt phẳng thỏa mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M(1; 2; 3) \\ \text{cặp vtcp } \vec{a}(1; -1; 1) \text{ và } \vec{b}(1; 2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } M(1; 2; 3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(5; 2; -3) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P): $5x + 2y - 3z = 0$, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử:* Ta lần lượt đánh giá:

▪ Mặt phẳng (P) chứa (d) nên phải đi qua gốc O(0; 0; 0) do đó các đáp án A và C bị loại.

▪ Mặt phẳng (P) cho bởi đáp án B không đi qua điểm M nên đáp án B bị loại.

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 14. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (α) và đường thẳng (Δ) có:

$$(\alpha): 2x + y + z + 5 = 0 \text{ và } (\Delta): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Tọa độ giao điểm của (Δ) *và* (α) *là:*

A. (-2; -1; 0) B. (-5; 2; 3). C. (1; 3; 2). D. (-17; 9; 20).

Đáp số trắc nghiệm D.

➢ *Lời giải tự luận:* Thay phương trình của (Δ) vào (α) ta được:

$$2(1 + 3t) + 3 - t + 2 - 3t + 5 = 0 \Leftrightarrow 2t = -12 \Leftrightarrow t = -6$$

$\Rightarrow (\Delta) \cap (\alpha) = \{M(-17; 9; 20)\}$, ứng với đáp án D.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1* (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Thay tọa độ của điểm trong đáp án A (thuộc (α)) vào phương trình đường thẳng (Δ) ta thấy:

$$\begin{cases} -2 = 1 + 3t \\ -1 = 3 - t \\ 0 = 2 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \\ t = 2/3 \end{cases}, \text{ vô nghiệm} \Rightarrow \text{Đáp án A bị loại.}$$

▪ Thay tọa độ của điểm trong đáp án B (thuộc (α)) vào phương trình đường thẳng (Δ) ta thấy:

$$\begin{cases} -5 = 1 + 3t \\ 2 = 3 - t \\ 3 = 2 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 1 \\ t = -1/3 \end{cases}, \text{ vô nghiệm} \Rightarrow \text{Đáp án B bị loại.}$$

▪ Thay tọa độ của điểm trong đáp án C (thuộc (Δ)) vào phương trình mặt phẳng (α) ta thấy:

$$2 + 3 + 2 + 5 = 0 \Leftrightarrow 12 = 0, \text{ mâu thuẫn} \Rightarrow \text{Đáp án C bị loại.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

➢ *Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2* (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Thay tọa độ của điểm trong đáp án D vào phương trình mặt phẳng (α) và đường thẳng (Δ) ta thấy:

$$-34 + 9 + 20 + 5 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ đúng}$$

$$\begin{cases} -17 = 1 + 3t \\ 9 = 3 - t \\ 20 = 2 - 3t \end{cases} \Leftrightarrow t = -6, \text{ có nghiệm.}$$

Do đó, việc lựa chọn đáp án D là đúng đắn.

Bài 15. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho: (d): $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ và (P): x - y + z - 2 = 0. Giao điểm của d và (P) có tọa độ là:

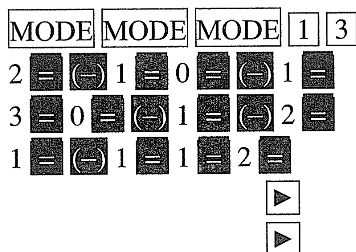
A. $\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}\right)$. **B.** (0; 1; 2). **C.** (1; -1; 0). **D.** (1; 4; 0).

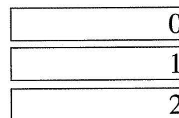
Đáp số trắc nghiệm B.

➢ *Lời giải tự luậnkết hợp sử dụng máy tính* CASIO fx – 570MS: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P):

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3} \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x - z = -2 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow (d) \cap (P) = \{M(0; 1; 2)\},$$

bằng cách thực hiện:





Bài 16. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm M(3; 3; 0) và mặt phẳng (P) có phương trình: (P): x + 2y - z - 3 = 0. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P) là:

A. (3; 3; 0). **B.** (-2; 0; 1). **C.** (2; 1; 1). **D.** (0; 5; -2).

Đáp số trắc nghiệm C.

➢ ***Lời giải tự luận 1:*** Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}$ (1; 2; -1)

Gọi (d) là đường thẳng qua M và vuông góc với (P), ta được:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M\,3,3,0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1,2,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Hình chiếu vuông góc H của A lên (P) chính là giao điểm của (d) và (P), do đó:

$3 + t + 2(3 + 2t) + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(2; 1; 1)$.

➢ ***Lời giải tự luận 2:*** Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 2; -1)$

Giả sử H(x; y; z) là chiếu vuông góc H của A lên (P), suy ra:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ AH \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{AH} // \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2; 1; 1).$$

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử 1*** (từ trái qua phải): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với điểm H trong đáp án A, ta lần lượt kiểm tra:

Thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta thấy:

$3 + 6 - 3 = 0 \Leftrightarrow 6 = 0$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án A bị loại.

▪ Với điểm H trong đáp án B, ta lần lượt kiểm tra:

Thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta thấy:

$-2 - 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng.

Ta có:

$\overrightarrow{HM}(5; 3; -1) \Rightarrow \overrightarrow{HM}$ không vuông góc với (P) $\Rightarrow$ Đáp án B bị loại.

▪ Với điểm H trong đáp án C, ta lần lượt kiểm tra:

Thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta thấy:

$2 + 2 - 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng.

Ta có: $\overrightarrow{HM}(1; 2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{HM} \perp (P)$, thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

➢ ***Lựa chọn đáp án bằng phép thử 2*** (từ phải qua trái): Ta lần lượt đánh giá:

▪ Với điểm H trong đáp án D, ta lần lượt kiểm tra:

Thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta thấy:

$10 + 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 9 = 0$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

▪ Với điểm H trong đáp án C, ta lần lượt kiểm tra:

Thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta thấy:

$2 + 2 - 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$, đúng.

Ta có: $\overrightarrow{HM}(1; 2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{HM} \perp (P)$, thỏa mãn.

Do đó, việc lựa chọn đáp án C là đúng đắn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa *Giải tích 12* - NXB Giáo dục

2. Sách giáo khoa *Bài tập Giải tích 12* - NXB Giáo dục

3. Sách giáo khoa *Hình học 12* - NXB Giáo dục

4. Sách giáo khoa *Bài tập Hình học 12* - NXB Giáo dục

5. Lê Hồng Đức: *Bài giảng và lời giải chi tiết Giải tích 12* - NXB Đại học Sư phạm

6. Lê Hồng Đức: *Bài giảng và lời giải chi tiết Hình học 12* - NXB Đại học Sư phạm

7. Lê Hồng Đức: Bộ *Bài tập tự luận và trắc nghiệm Giải tích 12* - NXB Đại học Quốc gia Hà Nội

8. Lê Hồng Đức: *Bài tập tự luận và trắc nghiệm Hình học 12* - NXB Đại học Quốc gia Hà Nội

9. Tạp chí *Toán học tuổi trẻ* - NXB Giáo dục

MỤC LỤC

PHẦN I
ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM
ĐỂ KHẢO SÁT VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

§ 1 Quan hệ giữa tính đơn điệu và đạo hàm của hàm số 7
§ 2 Cực trị của hàm số 20
§ 3 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số 43
§ 4 Đường tiệm cận của đồ thị 62
§ 5 Điểm uốn của đồ thị. Phép tịnh tiến hệ tọa độ 76
§ 6 Sự tương giao của hai đồ thị 88
§ 7 Sự tiếp xúc của hai đồ thị 96
§ 8 Tiếp tuyến của đồ thị 102

PHẦN II
HÀM SỐ LŨY THỪA
HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT

§ 1 Hàm số mũ - Hàm số logarit 159
§ 2 Phương trình mũ và phương trình logarit 169

PHẦN III
NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

§ 1 Nguyên hàm 203
§ 2 Tích phân 232

PHẦN IV
SỐ PHỨC

§ 1 Số phức 254
§ 2 Căn bậc hai của số phức - Phương trình bậc hai 264
§ 3 Dạng lượng giác của số phức và ứng dụng 269

PHẦN V
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§ 1 Hệ tọa độ trong không gian 275
§ 2 Phương trình mặt phẳng 298
§ 3 Phương trình đường thẳng 311

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập – Chế bản: (04) 39714896
Quản lí xuất bản: (04) 39728806 ; Tổng Biên tập: (04) 39715011
Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc – Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập nội dung:
Đinh Quốc Thắng, Dương Thị Thoa

Chế bản:
MINH LONG

Trình bày bìa:
TRỌNG KIÊN

Sửa bản in:
MINH HƯỜNG

Đối tác liên kết:
CÔNG TY TNHH MTV TM & DV VĂN HOÁ MINH LONG

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM NHANH ĐÁP ÁN
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM MÔN TOÁN - KÌ THI THPT

ISBN: 978-604-62-7366-0
Mã số: 1L-78PT2017
In 2.500 cuốn, khổ 19x26cm, tại Công ty cổ phần Văn hóa Hà Nội
Địa chỉ: 240 Minh Khai, Hai Bà Trưng, Hà Nội
Cơ sở in: KCN Đình Bảng, Từ Sơn, Bắc Ninh
Số XNĐKXB: 174-2017/CXBIPH/46-29/ĐHQGHN, ngày 19/01/2017
Quyết định xuất bản số: 79 LK-TN/QĐ-NXB ĐHQGHN ngày 15/02/2017
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2017.